

고정단 평판의 고정밀도 고유치 추출을 위한 개선된 무차원 동영향 함수법 개발

NDIF method for Practical and Accurate Eigenvalue Analysis of Clamped Plates

강상욱†

S. W. Kang

1. 서 론

본 논문에서는 고정단 경계조건을 가진 임의의 형상 평판의 고정밀도 고유치를 구하기 위한 새로운 NDIF 법에 대한 이론 정식화가 이루어진다. 기존 NDIF 법⁽¹⁾에서는 시스템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되어 있어서 고유치를 추출하는 과정이 불편하였으나, 본 논문에서 제안되는 방법은 기저 함수를 테일러 급수 함수로 전개하는 방법에 의해 시스템 행렬을 주파수 파라미터에 독립이 되도록 하여 고유치를 수월하게 얻을 수 있는 장점을 가진다.

2. 이론 정식화

고정단 경계를 가진 평판의 자유 진동 지배 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla^4 W - \Lambda^4 W = 0, \quad \Lambda = (\rho\omega^2 / D_E)^{1/4}, \quad (1,2)$$

여기서 W 는 평판의 진동 변위, Λ 는 주파수 파라미터, ρ 는 평판의 밀도, ω 는 각주파수(angular frequency), D_E 는 판강성(flexural rigidity of plate)을 나타낸다. 그리고 고정단 경계 조건 식은 다음과 같이 주어진다.

$$W(\Gamma) = 0, \quad \partial W(\Gamma) / \partial n = 0, \quad (3,4)$$

여기서 $W(\Gamma)$ 와 $\partial W(\Gamma) / \partial n$ 은 각각 평판의 경계 Γ 에서의 평판 변위와 기울기를 뜻하며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다.

Fig. 1에서 점선으로 표시된 해석 대상 고정단 평판의 경계는 N 개의 노드들로 이산화 된다. 평판 내부의 한 점 P 에서의 자유 진동 변위 응답은 무

차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정된다.

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N A_k J_0(\Lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\Lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|), \quad (5)$$

여기서 J_0 와 I_0 는 각각 제1종 0차 베셀 함수(Bessel function)와 수정 베셀 함수를 나타내며, A_k 와 B_k 는 미지 상수이다. 그리고 \mathbf{r}_k 는 Fig. 1에서 알 수 있듯이 평판 경계에 위치한 노드 P_k 에 대한 위치 벡터를 뜻한다.

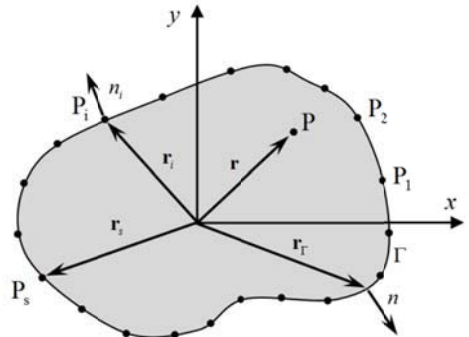


Fig. 1 Arbitrarily shaped plate discretized with boundary nodes P_1, P_2, \dots, P_N .

가정된 자유 진동 해 식(5)가 평판의 경계 노드에서 고정단 경계 조건을 만족하도록 하기 위해, 고정단 경계 조건 식 (3, 4)를 다음과 같이 각각 이산화한다.

$$W(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (6)$$

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}_i)}{\partial n_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (7)$$

여기서 \mathbf{r}_i 와 n_i 는 평판의 경계 노드 P_i 의 위치벡터와 법선 방향을 각각 나타낸다.

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : (02) 760-4228, Fax : (02) 760-4329

자유 진동 해 식(5)를 경계 조건 식(6)과 식(7)에 대입하면 다음의 식을 각각 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^N A_k J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) = 0, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{k=1}^N A_k \Lambda J_1(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \frac{\partial}{\partial n_i} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| - B_k \Lambda I_1(\Lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \frac{\partial}{\partial n_i} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| = 0, \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

이제 식(8)과 식(9)에서 주파수 파라미터 Λ 를 베셀 함수로부터 분리해내기 위해, 베셀 함수 J_0 , I_0 , J_1 , I_1 를 M 개의 테일러 급수 전개^{2, 3)}에 의해 근사하면 다음과 같은 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\lambda^0 \begin{bmatrix} \Phi'_0 & \Phi'_0 \\ \Psi'_0 & -\Psi'_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} + \lambda^1 \begin{bmatrix} \Phi'_1 & \Phi'_1 \\ \Psi'_1 & -\Psi'_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} + \dots + \lambda^M \begin{bmatrix} \Phi'_M & \Phi'_M \\ \Psi'_M & -\Psi'_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

여기서 $\lambda = \Lambda^2$ 이다.

다음으로, 위 식을 다음과 같이 간단한 형태로 표현한다.

$$\lambda^0 \mathbf{SM}_0 \mathbf{C} + \lambda^1 \mathbf{SM}_1 \mathbf{C} + \dots + \lambda^M \mathbf{SM}_M \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{SM}_s = \begin{bmatrix} \Phi'_s & \Phi'_s \\ \Psi'_s & -\Psi'_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix}, \quad (12, 13)$$

주파수 파라미터 λ 에 대한 고차 다항 행렬식 식(11)은 다음과 같이 최종 시스템 행렬식으로 선형화될 수 있다.⁴⁾

$$\mathbf{SM}_L \mathbf{D} = \lambda \mathbf{SM}_R \mathbf{D}, \quad (14)$$

3. 검증 예제

Fig. 2와 같이 반지름이 1m인 고정단 원형 평판의 경계를 16개의 노드로 분할한 후, 본 논문에서 제안된 방법을 적용하였다. Table 1에서, 본 논문에서 제안된 방법과 엄밀해를 비교 해보면, $M = 20$ 인 경우에는 5차 고유치 까지 오차가 없음을 알 수 있으며, $M = 25$ 인 경우에는 6차 고유치 까지 모두 오차가 없이 정확히 일치함을 확인할 수 있다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아

수행된 것임(2012R1A1A2044327).

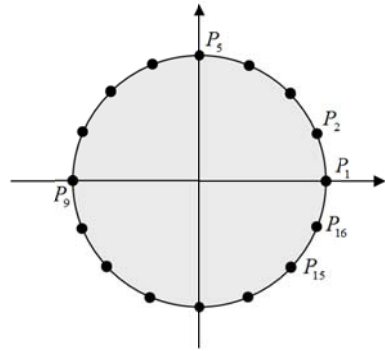


Fig. 2 Clamped circular plate discretized with 16 nodes.

Table 1 Eigenvalues of the circular plate by the proposed method and the exact solution (parenthesized values denote errors (%) with respect to the exact solution).

	proposed method (16 nodes)		exact solution
	M=20	M=25	
1	3.196 (0.00)	3.196 (0.00)	3.196
2	4.611 (0.00)	4.611 (0.00)	4.611
3	5.921 (0.00)	5.906 (0.00)	5.906
4	6.306 (0.00)	6.306 (0.00)	6.306
5	7.144 (0.00)	7.144 (0.01)	7.144
6	7.820 (0.27)	7.799 (0.00)	7.799

참 고 문 헌

1. Kang, S. W. and Lee J. M., 2001, "Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-type functions," Journal of Sound and Vibration. Journal of Sound and Vibration. Vol. 242. No. 1, pp. 9~26.
2. Kang, S. W. and Kim, J. G., 2009, "A Formulation of NDIF Method to the algebraic Eigenvalue Problem for Efficiently Extracting Natural Frequencies of Arbitrarily Shaped Plates with the Simply Supported Boundary Condition," Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 19, No. 6, pp. 607~613.
3. Spiegel, M. R., 1983, Advanced Mathematics, McGraw-Hill, Inc, Singapore.
4. Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., 1982, Matrix Polynomials, Academic Press, New York.