한국소음진동공학회 2014년 춘계학술대회논문집, pp. 277~278

모달 파라미터의 일부를 이용한 시스템 행렬의 구성

Construction of System Matrices using Parts of Modal Parameters

황 우 석†

Woo Seok Hwang

1. 서 론

모달 해석이나 모달 시험은 시스템의 동적 특성을 나타내는 모달 파라미터, 즉 고유진동수, 진동 모드 등을 구하는 연구이다. 구해진 모달 파라미터들을 이용하여 시스템의 축약된 모델을 재구성하여 해석모델의 개선이나 구조물의 건전성 판단 등에 활용하는 연구들이 진행되어왔다. 모델의 자유도와 모드 수가 일치하는 경우, 정확한 모델 재구성이 가능하다. 하지만, 모델의 자유도는 크지만 사용가능한 모드의 수가 작은 경우는 모달 모델을 이용하는 것이 가능하지만, 물리적 좌표계에 대해 운동방정식을 재구성하는 연구는 아직 없다.

본 연구에서는 시스템 개발과정에서 필수적으로 수행하는 모달 시험이나 모달 해석의 결과를 이용하여 특정 점들에 대한 시스템의 운동 방정식을 재구성하는 방법을 제시한다. 선정된 물리적 좌표계에 대해 재구성된 운동방정식을 다른 시스템과 연결하여 동적 특성을 분석하였다. 이를 통해 제안된 방법에 의하여 재구성된 운동방정식의 정확도와 효율성을 확인하였다.

2. 구성방법

비감쇠 시스템의 동적 거동은 식(1)과 같은 운동방정식으로 표현된다.

$$\boldsymbol{M}\ddot{x}+\boldsymbol{K}x=f \tag{1}$$

여기서, $\boldsymbol{M}$과 $\boldsymbol{K}$는 각각 시스템의 질량과 강성 행렬이며, $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{f}$는 각각 변위와 외력 벡터이다. 이 시스템의 동적 특성을 나타내는 모달 파라미터인 고유진동수와 진동 모드는 시스템의 질량 및 강성 행렬과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}&=I\\ \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}&=\Omega\end{aligned} \tag{2}$$

또한 이로부터 식(3)과 같이 질량 행렬과 강성 행렬을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\\ \boldsymbol{K}&=\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{3}$$

이와 같은 방법으로 고유 진동수와 진동 모드로부터 질량과 강성 행렬을 구하기 위해서는 몇 가지 제약이 있다. 먼저 질량이나 강성 행렬의 자유도 갯수와 동일한 갯수의 고유 진동수와 진동 모드를 갖고 있어야만한다. 또한 각 진동모드는 질량 행렬에 대하여 정규화(normalized)되어 있어야한다.

실제로 해석 모델을 갖고 있고, 이에 대한 모달 해석을 수행한 경우 이 조건을 만족할 수 있으나, 모달 시험을 통해 고유 진동수와 진동 모드를 확보한 경우에는 불가능하다. 많은 측정점으로부터 진동 데이터를 확보하더라도 측정점의 개수만큼 고유 진동수와 진동모드를 추출하는 것은 불가능한 경우가 많다.

또한 컴퓨터의 성능향상 등으로 점점 세밀한 해석을 추구함에 따라 해석 모델의 자유도가 점점 커지는 상황에서 방대한 숫자의 고유진동수와 진동모드를 관리하는 것은 매우 어려운 일이다. 특히 진동해석에서 높은 고유 진동수를 갖는 상위 모드들은 크게 의미가 없으므로 제대로 관리되지 못하는 경우도 많다.

† 교신저자; 정회원, 대구대학교 기계·자동차공학부
E-mail : whwang@daegu.ac.kr
Tel : 053-850-6672 , Fax : 053-850-6689

본 논문에서는 다른 시스템과의 연결부나 외력이 가해지는 부분, 응답의 고려가 필요한 부분 등 중요한 점들을 선정하고, 이 점들만을 자유도로 하는 시스템 방정식을 구성하는 방법을 제시하고자한다.

3. 예 제

본 논문에서 제시한 방법을 간단한 모델에 적용하여 확인하였다. 가장 간단한 동적 시스템은 질량-스프링 시스템이므로 Fig.1과 같이 적절한 자유도를 갖는 시스템을 예제로 제시하였다. Fig.1의 모든 질량은 1kg이고, 모든 스프링의 강성은 1000N/m인 경우에 대하여 검증을 수행하였다.

구조물에 대하여 제안한 방법으로 축약된 질량과 강성 행렬을 구한 후, 정적 및 동적 거동을 계산하여 타당성을 검증하였다. 직접 수치를 제시하면서 설명하기 위하여 7개의 절점으로 구성된 간단한 모델이다.

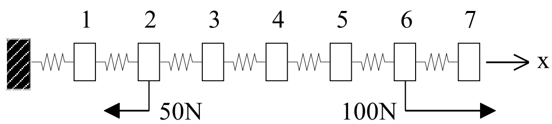

Fig.1 Spring-mass model for verification

먼저 구조물에 대한 질량과 강성 행렬을 구하고 이의 고유치를 계산하였다. 구조물의 모달 해석을 통해 구한 진동모드 행렬과 고유치 행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} 0.11 & -0.30 & 0.45 & -0.51 & 0.49 & 0.38 & -0.21 \\ 0.21 & -0.49 & 0.45 & -0.11 & -0.30 & -0.51 & 0.38 \\ 0.30 & -0.49 & 0.00 & 0.49 & -0.30 & 0.30 & -0.49 \\ 0.38 & -0.30 & -0.45 & 0.21 & 0.49 & 0.11 & 0.51 \\ 0.45 & 0.00 & -0.45 & -0.45 & 0.00 & -0.45 & -0.45 \\ 0.49 & 0.30 & 0.00 & -0.30 & -0.49 & 0.49 & 0.30 \\ 0.51 & 0.49 & 0.45 & 0.38 & 0.30 & -0.21 & -0.11 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix} 43.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 382 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1791 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2618 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3338 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3827 \end{bmatrix} \tag{4}$$

절점은 2, 6, 7번과 1차, 2차, 3차 진동모드를 선정하여 절점과 모드의 개수가 3인 경우, 모드형상 행렬과 고유치 행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} 0.21 & -0.49 & 0.45 \\ 0.49 & 0.30 & 0.00 \\ 0.51 & 0.49 & 0.45 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix} 43.7 & 0 & 0 \\ 0 & 382 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \tag{5}$$

이를 이용하여 구한 질량과 강성 행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2.43 & 1.94 & -1.33 \\ 1.94 & 11.09 & -6.49 \\ -1.33 & -6.49 & 5.24 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 870.3 & -535.9 & 222.8 \\ -535.9 & 4654. & -4017. \\ 222.8 & -4017. & 3684. \end{bmatrix} \tag{6}$$

이 질량과 강성 행렬의 고유치는 43.7, 382, 1000으로 정확하게 3개의 고유치와 일치한다. 또한 정적 성능 검증을 위하여 절점 2와 6에 하중이 각각 −50N, 100N이 가해진 경우의 변위를 계산하였다. 세 점의 정적 변형은 0.105, 0.478, 0.514로 원래 모델의 0.1, 0.5, 0.5와 유사하다. 질량이나 강성 행렬의 각 항들이 물리적 의미를 갖는다고 보기 어렵지만, 정적이나 동적으로 원래 구조물과 동등 내지 유사한 특성을 보이는 시스템이 구성되었음은 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문은 모드 형상과 고유치를 이용하여 동적 시스템을 재구성하는 간단한 기법을 제시하고, 이 기법의 정확성과 유용성을 확인하였다.

일부 자유도를 고려하고 고려된 개수만큼의 기본 모드를 이용하여 시스템을 재구성하면 정적이나 동적으로 만족할 만한 시스템이 재구성된다.

향후 감쇠가 고려된 시스템에 대하여서도 본 논문에서 제시된 기법을 확장하여 적용하는 방법을 개발할 예정이다.