이항트리에서 에지번호매김

김용석*
*서남대학교 컴퓨터정보학과
e-mail:yskimsky320@naver.com

Edge Labeling on Binomial Trees

Yong Seok Kim*
*Dept of Computer & Information, Seonam University

요 약

본 논문에서는 이항트리에서의 선형적 에지번호매김방법과 변형된 에지번호매김방법을 제안한다. 이러한 연구결과는 최대 연결도를 갖는 신뢰성이 높은 상호연결망의 일종인 원형군 그래프(circulant graph)의 점프열(jump sequence)로 에지번호들을 사용하면 이항트리를 스패닝 트리로 갖고 최적방송이 가능한 위상설계를 할 수 있다.

1. 서론

대규모 계산수행을 필요로 하는 문제들의 대부분은 동시에 처리될 수 있는 더 작은 문제들로 분할될 수 있으며 분할된 문제들은 병렬처리 컴퓨터의 각 프로세서에서 병렬적으로 수행된다. 이러한 병렬 알고리즘의 시간 복잡도는 계산시간과 통신시간으로 나눌 수 있다. 계산시간은 각 프로세서에서 순차 프로그램을 수행하는데 걸리는 시간이며 통신시간은 프로세서들 사이에 데이터를 통신하는데 걸리는 시간이다. 프로세서의 성능이 증가하면서 계산시간보다는 통신시간이 병렬알고리즘에 미치는 영향이 더욱 커져가고 있다. 효율적인 통신방법은 시스템의 고성능을 얻기 위해 매우 중요하다[1-4].

방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 한 프로세서에 있는 메세지를 네트워크에 있는 다른 모든 프로세서들에게 보내는 과정을 말한다. 임의의 노드 에서 방송시간은 $b(v)$로 표기하고, 이는 노드 v 에서 시작한 방송을 완료하는데 필요한 최소 단위시간을 말한다. 각 단위시간 동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 두배씩 증가하므로 N개의 노드를 가지는 그래프 G의 임의의 노드 v 에서의 방송시간은 $\log_2 N$ 보다 크거나 같다. N개의 노드를 가지는 그래프 G의 임의의 노드 v에서의 방송시간 $b(v)$가 $\log_2 N$ 이면 이는 최소방송시간이며 최소방송시간을 가지는 방송을 최소방송이라 한다. 또한 루트에서 시작하여 최적방송이 가능한 트리를 최적방송트리(optimal broadcast tree)라 한다[5].

만약 노드대칭적인 상호연결망이 스패닝 부그래프로 이항트리를 갖는다면 그 상호연결망의 어떠한 노드도 이항트리의 루트가 되도록 스패닝트리를 구성할 수 있다. 즉 그 상호연결망의 어떠한 노드도 이항트리의 루트가 되도록 스패닝 트리를 구성할 수 있다.즉 그 상호연결망의 어떠한 노드에서도 스패닝 트리인 이항트리의 구조를 통해 최소시간에 방송을 완료할 수 있다. 2^n 개의 노드를 가진 최적방송트리는 이항트리이다. 이항트리는 하이퍼큐브와 같은 다양한 시스템에서 병렬응용을 위해서 가장 자주 사용되는 스패닝 트리 구조중의 하나이다. 또한 병렬 분할 정복알고리즘의 이상적인 계산구조로 평가되고 전위계산에 사용될 뿐 만 아니라 데이타방송에 폭넓게 사용되어진다[6,7].

본 논문에서는 그래프 임베딩 문제와 관련된 선형적 에지번호매김방법과 변형된 에지번호매김방법을 제안한다. 그리고 2 장에서는 관련연구로서 원형군 그래프에 대한 임베딩과 일반적인 에지번호매김방법에 대해 논하고 3 장에서는 이항트리와 선형적 에지번호매김방법과 변형된 에지번호매김방법을 제안한다. 마지막으로 4 장에서는 결론으로 구성된다.

2. 관련연구

2.1 원형군그래프에 대한 임베딩

원형군 그래프는 1962년 *Harray*가 최초로 제시한 것으로 알려져 있다. 그는 당시 신뢰성이 높은

통신망을 설계하는 최적화 문제인 “n 개의 노드와 e 개의 에지를 갖를 가지면서 연결도가 최대인 그래프를 구성하라”하는 문제를 원형군그래프에 속하는 그래프를 제시함으로서 해결하였는데 그가 제시한 그래프를 *Harrary* 그래프라고 부른다. 원형군그래프는 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있어서 여러 분야에서 많이 응용되고 있다[8]. $c_{n(j_1, j_2, \dots, j_k)}$로 표기하는 원형군그래프는 N 개의 노드 $\{0,1,\dots,N-1\}$를 가지고 있으며, 임의의 두 노드 v, w 대해서 $v+j_i = w(\mathrm{mod}\,N), 1 \le i \le k$를 만족하는 j_i가 존재할 때 v, w 를 잇는 에지가 있다. 이때 각각의 j_i를 점프라고 부른다. 원형군그래프는 각 노드의 분지수가 같은 정규그래프이다.

2.2 에지번호매김

임베딩과 관련된 에지번호매김은 G 의 정점에 1에서 정점의 개수까지의 서로 다른 정수를 부여하는데 에지번호가 모두 주어진 조건을 만족하는 번호매김이 가능하면 그 그래프는 원형군그래프의 부그래프임을 쉽게 알 수 있다.그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다.

3. 에지번호매김방법

3.1 이항트리

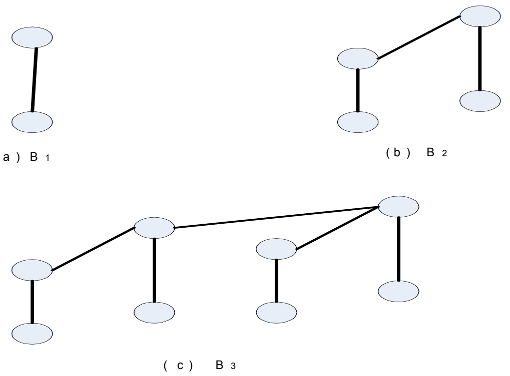
이항트리는 병렬망에서 메시지 방송과 병합우선순위큐를 구현하는데 중요한 역할을 한다. 이항트리는 다음과 같이 정의한다.

정의1. 이항트리, B_k

(1)하나의 트리를 갖는 이항트리는 B_0이다.

(2)이항트리의 왼쪽 부그래프 T_l와 오른쪽 부그래프 T_r이 서로 분할된 $B_{k-1}, k \ge 1$이라고 하면 B_k는 T_l의 루트가 T_r의 루트의 좌측 자식이 되게 에지를 하나 추가함으로서 만들어진다.

그림 1 에 이항트리의 예가 있다.



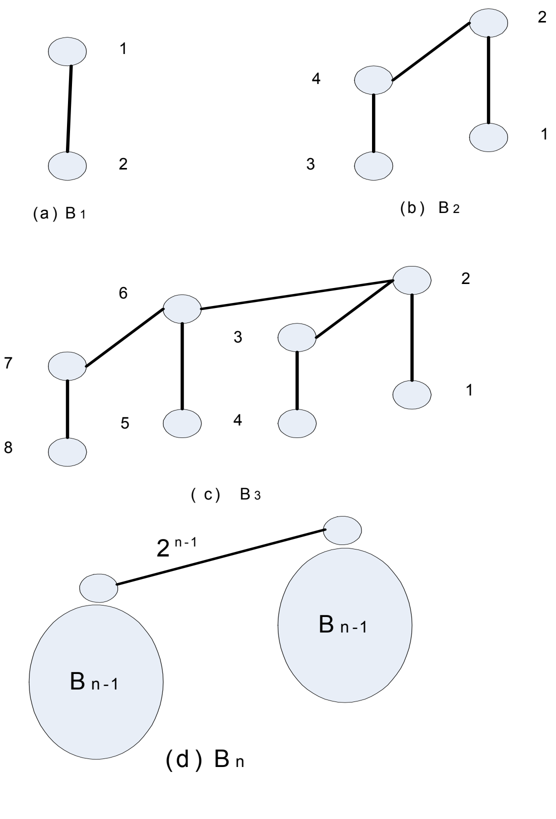
(그림 1) 이항트리의 예

3.2 선형적 에지번호매김방법

임의의 이항트리에 부분트리인 B_2 각각에 선형적으로 에지번호매김하면 추가적으로 $2^{n-1}, n \ge 3$의 에지번호를 얻을 수 있다.

정리 1. 임의의 이항트리는 선형적으로 에지번호매김을 하면 에지번호 $\{1, 2^{n-1}, n \ge 3\}$를 얻을 수 있다.

증명) 이항트리의 정의 1에 의해서 임의의 이항트리 B_k 에서 k=1, 2인 경우에는 쉽게 선형적으로 에지번호매김을 할 수 있다. 만약 k=n-1 인 경우에 선형적으로 에지번호매김을 할 수 있다고 가정하면, k=n 인 경우에는 이항트리의 왼쪽서브트리와 오른쪽서브트리는 서로 대칭인 B_{n-1}이므로 가정에 의해 번호매김이 가능하고 이때 두 서브트리 사이에 추가되는 하나의 에지의 에지번호는 항상 2^{n-1}이므로 성립함을 그림 2 에서와 같이 쉽게 알 수 있다■.



(그림 2) 선형에지번호매김의 예.

3.3 변형된 에지번호매김방법

임의의 이항트리 B_n에 왼쪽서브트리 B_{n-1}에는 선형에지번호매김을 하고 오른쪽서브트리에는 선형에지번호매김된 B_{n-1}의 오른쪽서브트리 B_{n-2}와 왼쪽서브트리B_{n-2}를 서로 교환하면 항상 추가되는 에지번호는 $2^{n-2}, n \ge 4$ 이다.

정리 2. 임의의 이항트리B_k는 왼쪽서브트리 B_{n-1}에는 선형에지번호매김을 하고 오른쪽서브트리에는 선형에지번호매김된 B_{n-1}의 오른쪽서브트리 B_{n-2}와 왼쪽서브트리B_{n-2}를 서로 교환하면 에지번호는 $\{1, 2^{n-2}, n \geq 4\}$ 이다.

증명) 그림 3에서와 같이 이항트리의 정의 1에 의해서 임의의 이항트리B_k 에서 k=3인 경우에는 쉽게 선형적으로 에지번호매김을 할 수 있다. 만약 k=n-1인 경우에 변형된에지번호매김을 할 수 있다고 가정하면, k=n 인 경우에는 이항트리의 왼쪽서브트리 B_{n-1}는 선형적 에지번호매김이 가능함이 정리 1에 의해서 알 수 있고, 오른쪽 서브트리B_{n-1}는 자신의 오른쪽서브트리B_{n-2}와 왼쪽서브트리B_{n-2}를 서로 바꾸면 추가되는 에지의 에지번호는 항상 $2^{n-2}, n \geq 4$ 이다■.

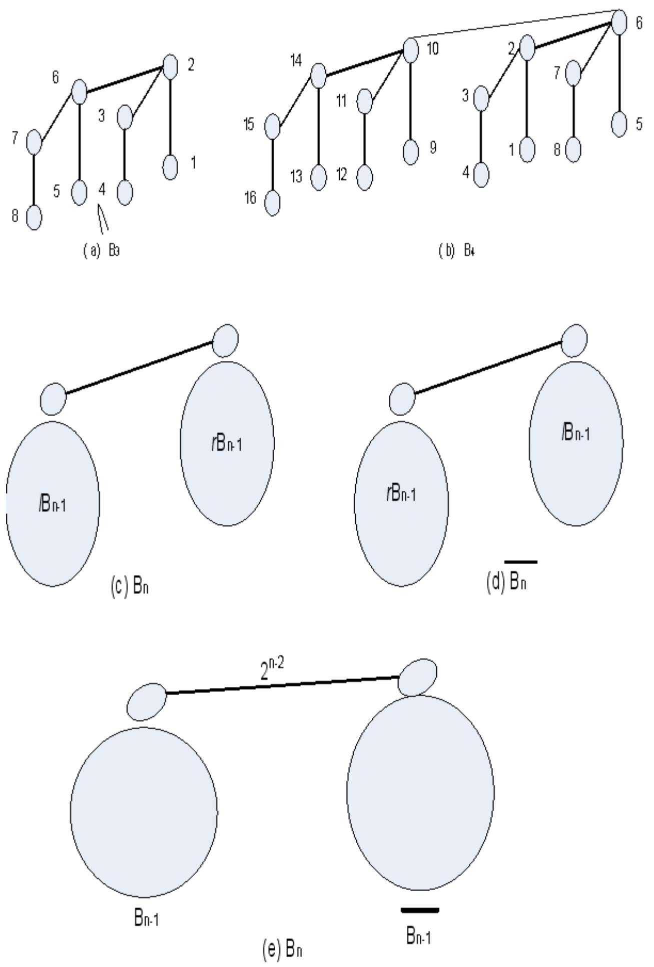


그림 3. 변형된 에지번호매김의 예

4. 결론

본 논문에서는 이항트리에 선형적 에지번호매김방법과 변형된 에지번호매김방법을 제안하였다. 이러한 에지번호들은 상호연결망의 일종인 원형군 그래프의 점프열로 사용하면 최적방송트리인 이항트리를 스패닝트리로 갖는 새로운 상호연결망을 설계할 수 있고 개발된 모든 알고리즘을 시뮬레이션할 수 있다. 향후 연구과제로는 서로 다른 점프열을 갖는 새로운 원형군 그래프의 설계와 여러 가지 망척도면에서의 비교분석이 필요하다.

참고문헌

[1] Y. Yang and J. Wanger, “Routing Permutations with link-disjoint and node-disjoint paths in a class of self-routable interconnections,” IEEE trans. Parallel and Distributed Systems, vol. 14, no. 4, pp. 383-393, Apr, 2003.

[2] D. A. Reed and H. A. Fujimoto, Multicomputer Networks: Massage-based Parallel Processing, MIT Press, 1987.

[3] S. W. Golomb, “How to number a graph,” Graph Theory and Computing, Academic Press, New York (1972) pp. 23-37.

[4] F. R. K. “Some problems and a graph,” Graph Theory and Computing, Academic Press, New York (1972) pp. 23-37.

[5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1976.

[6] L. H. Harper, “Optimal numbering and isoperimetric problems on graph,” J. Combinatorial Theory (1966) pp. 385-393.

[7] F. T. Leighton, Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes, Morgan Kaufmann publishers, San Mateo, California, 1992.

[8] F, Harray, “The maximum connectivity of a graph,” Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. Vol. 48, pp. 1142-1146, 1962.