

# 다단 불균일 단면 회전축의 진동 연구

## Vibration Analysis of a Multi-Stage Nonuniform Shaft

송오섭† · 박상윤\* · 강성환\* · 서정석\*

Ohseop Song, Sangyun Park, Sunghwan Kang, and Jeongsuk Seo

### 1. 서 론

본 연구에서는 불균일한 단면과 양 끝단의 임펠러 형상을 갖는 복잡한 회전축계의 진동 해석을 수행함에 있어, TMM을 보완할 수 있는 방법으로서 회전축계를 불균일 단면을 갖는 Timoshenko 보로 모델링하여 진동해석을 수행하였다. 또한 ANSYS 유한요소 프로그램을 이용한 해석결과와 실험을 통한 결과를 비교분석하였다. 다단 회전축계의 형상과 치수를 다음 그림과 같이 나타내었다.

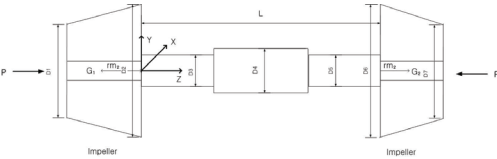


Fig. 1 Configuration of multi-stage non-uniform shaft

### 2. 지배방정식

#### 2.1 변위장

회전축계 내부의 한 점의 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z; t) &= u_0(z; t) - y\phi(z; t), \\ v(x, y, z; t) &= v_0(z; t) + x\phi(z; t), \\ w(x, y, z; t) &= w_0(z; t) + \theta_x(z; t)y(s) \\ &+ \theta_y(z; t)x(s) - \phi'(z; t)F_w(s) \end{aligned} \quad (1)$$

#### 2.2 운동방정식과 경계조건

#### 1) 해밀턴 변분원리

다음 식으로 표현되는 해밀턴 변분원리를 이용하여 지배방정식을 유도한다.

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\tau} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\tau - \delta K - \int_{\Omega_s} s_i \delta v_i d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\tau} \rho H_i \delta v_i d\tau \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

#### 2) 운동방정식과 경계조건

$$\begin{aligned} [kGA(z)(u_0' + \theta_y)]' - Pu_0'' \\ = m(z)\ddot{u}_0 - 2m(z)\Omega\dot{v}_0 - m(z)u_0\Omega^2 \\ [kGA(z)(v_0' + \theta_x)]' - Pv_0'' \\ = m(z)\ddot{v}_0 + 2m(z)\Omega\dot{u}_0 - m(z)v_0\Omega^2 \\ [EI(z)\theta_y']' - kGA(z)(u_0' + \theta_y) = J(z)\ddot{\theta}_y \\ [EI(z)\theta_x']' - kGA(z)(v_0' + \theta_x) = J(z)\ddot{\theta}_x \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 굽힘강성  $EI(z)$ , 전단강성  $kGA(z)$ , 단위길이당 질량  $m(z)$ , 질량관성모멘트  $J(z)$  모두 축방향 좌표  $z$ 의 함수이다. 위 식에서 코리올리 가속도에 의해서 수평방향운동과 수직방향운동이 서로 연성됨을 알 수 있다. 모든 경계조건을 만족하는 일반적인 경계조건식은 아래와 같다.

at  $z=0$  :

$$\begin{aligned} kGA(u_0' + \theta_y) - Pu_0' + M_1\ddot{u}_0 + M_1r_1\ddot{\theta}_y = 0 \\ kGA(v_0' + \theta_x) - Pv_0' + M_1\ddot{v}_0 + M_1r_1\ddot{\theta}_x = 0 \\ EI\theta_y' + J_1\ddot{\theta}_y + M_1r_1\ddot{u}_0 = 0 \\ EI\theta_x' + J_1\ddot{\theta}_x + M_1r_1\ddot{v}_0 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

† 교신저자; 정회원, 충남대학교  
E-mail : songos@cnu.ac.kr  
Tel : 010-3200-1979, Fax : 042-822-5642  
\* 충남대학교

at  $z=L$  :

$$\begin{aligned}
 kGA(u_0' + \theta_y) - Pu_0' + M_2 \ddot{u}_0 - M_2 r_2 \ddot{\theta}_y &= 0 \\
 kGA(v_0' + \theta_x) - Pv_0' + M_2 \ddot{v}_0 - M_2 r_2 \ddot{\theta}_x &= 0 \\
 EI\theta_y' + J_2 \ddot{\theta}_y - M_2 r_2 \ddot{u}_0 &= 0 \\
 EI\theta_x' + J_2 \ddot{\theta}_x - M_2 r_2 \ddot{v}_0 &= 0
 \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. 결과 및 분석

#### 1) 1차 고유진동수 비교

Timoshenko 보 모델 (Matlab) : 205 Hz

ANSYS FEM : 230 Hz

Modal Test : 220 Hz

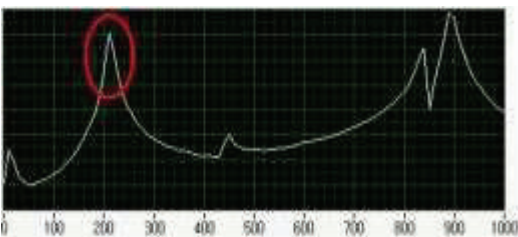
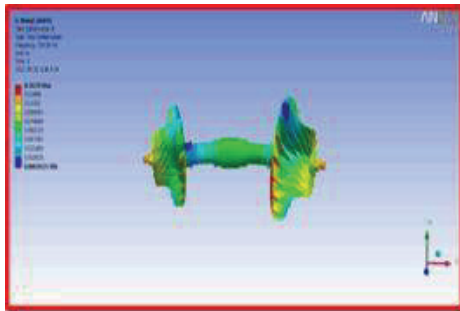


Fig. 2 FEM model and experiment setup

#### 2) ANSYS 3D & 1D 모델결과 비교

Table 1 Comparison of 3D and 1D FEM results

	3D	1D	오차	1D-수정	오차
	고유진동수	고유진동수		고유진동수	
1차	230.31	205.59	10.73%	226.26	1.76%
2차	509.12	480.78	5.56%	517.23	1.59%

유한요소해석 프로그램인 ANSYS classic을 이용하여 1D 모델, 1D-수정 모델, 3D 모델의 결과 값을 비교하였다. 압축기 회전축계 3D 모델링 프로그램에서 얻은 임펠러의 물성치 값을 고려하여 그 값과 비슷한 값을 갖도록 회전축계 모델을 집중 질량화시켜 3D 모델의 값과 비슷한 결과를 갖도록 모델링하였다.

#### 3) 베어링 강성(감쇠)과 단면 변화에 따른 축계 1D 모델의 동적 특성결과

Table 2 Comparison of two different 1D models

강성-감쇠를 고려한 1D 모델	단면을 변화시킨 1D모델

해석 결과, 일반적인 틸팅 패드 베어링의 강성과 감쇠 값의 범위를 고려하여 강성은  $10^7 \sim 10^{10} N/m$ , 감쇠는  $10^3 \sim 10^6 Ns/m$ 의 값의 변화 범위를 가질 때, 강성은 커질수록 고유진동수 값도 크게 나타나 아주 큰 값  $10^{20} N/m$ 에서는 강체모드(rigid body motion)가 되기도 하였다. 감쇠는  $10^2 \sim 10^4 Ns/m$ 의 범위에서는 영향이 없다가  $10^5 Ns/m$  이상의 값을 가질 때부터 그 감쇠효과가 나타나 고유진동수가 낮아지는 결과를 보였다.

단면형상에 따른 결과 비교시 기준 모델에서 가는 축과 두꺼운 축으로 모델링하여 비교해 본결과, 가는 축을 갖는 모델에서는 기준보다 낮은 고유진동수 값을, 두꺼운 축을 갖는 모델에서는 기준보다 더 높은 고유진동수 값을 가짐을 보였다. 그림8은 강성(감쇠)과 단면 크기 변화에 따른 고유진동수 변화경향을 보여주고 있다.

Table 3 Variation of natural frequencies with bearing stiffness

강성(N/m)	고유진동수(Hz)	위험속도(rpm)
$y: 4 \times 10^7$ $z: 2 \times 10^7$	233.03	12991.08
$y: 4 \times 10^8$ $z: 2 \times 10^8$	305.39	17814.33
$y: 4 \times 10^8$ $z: 2 \times 10^8$	606.76	33577.21

Table 4 Variation of natural frequencies with damping of bearings

감쇠(Nm/s)	고유진동수(Hz)	위험속도(rpm)
$y: 4 \times 10^2$ $z: 2 \times 10^2$	233.03	12991.08
$y: 4 \times 10^3$ $z: 2 \times 10^3$	233.02	12990.52
$y: 4 \times 10^4$ $z: 2 \times 10^4$	232.04	12935.12
$y: 4 \times 10^5$ $z: 2 \times 10^5$	165.86	9200.54


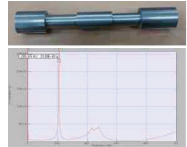
Table 5 Variation of natural frequencies for different models

축 단면 형상	고유진동수(Hz)	위험속도(rpm)	
기존모델	233.03	12991.08	
가는단면	189.89	10821.49	
두꺼운단면	353.35	18562.63	
	기존 모델	가는 모델	두꺼운 모델
Total mass(kg)	300.52	257.31	383.07

4) 단순 실물 모델의 실험 결과

실제 압축기 회전축계의 해석 능력을 키우기 위해 우선 간단한 회전축계를 제작하고 이를 FEM과 이론 해석 결과와 비교하였다. 실험 조건의 어려움으로 회전 속도가 영인 상태에서 clamped-free 경계 조건을 만족하는 시스템의 고유진동수를 측정하였다. 그림9는 수치해석, FEM, 실험을 통해서 얻은 결과 값들을 비교해주고 있다.

Table 6 Comparison of FEM and experiment results

Timosheno beam (Matlab)	FEM	Modal test
236Hz		
	234Hz	209Hz

4. 결 론

본 연구에서는 단면의 형상과 크기가 변화하는 원형 단면 회전축에 대한 진동특성 및 안정성에 대하여 연구하였으며, 보존력과 자이로스코프 힘, 섬유각, 적층방법 등이 정적불안정과 동적불안정에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

후 기

본 연구는 2012 교육과학기술부와 한국연구재단의 지역혁신인력양성사업으로 수행된 연구결과임

참고문헌

- 1) C. D. Kim and C. W. Bert, "Critical speed analysis of laminated composite hollow drive shaft," Composites Eng., Vol. 3, pp. 633-643, 1993.
- 2) K. Huseyin and R. H. Plaut, "Transverse vibrations and stability of systems with gyroscopic forces," Journal of Structural Mechanics, Vol. 3, pp. 163-177, 1974-1975.