

# 전달 매트릭스를 이용한 초기 비틀림각을 가진 균일한 오일러보의 연성된 굽힘 진동해석

## Analysis of Coupled Bending Vibration of the Pre-twisted Uniform Euler Beam using Transfer Matrix Method

이정우\* · 최상훈\* · 김낙점\* · 오재응\*\* · 이정윤†

Jung Woo Lee, Sang Hoon Choi, Nak Jeom Kim, Jae-Eung Oh and Jung Youn Lee

### 1. 서 론

초기 비틀림각(Pre-twisted angle)을 가진 보요소  
의 동특성(dynamic characteristics) 해석은 터빈 블  
레이드, 기어 이, 헬리콥터 로터 블레이드 등과 같  
은 공학적 설계에 중요한 요소이다. 이러한 문제에  
대한 동특성의 해를 결정하기 위하여 근사법, 유한  
요소법, 전달 행렬법, 수치해석법 등과 같은 수많은  
방법들이 연구되었고 지금까지도 많은 연구자들이  
연구를 수행하고 있다.

Banerjee(2001) 와 Lin(1999)이 해밀턴의 원리  
(Hamilton's principal)을 이용하여 초기 비틀림각을  
가진 오일러보에 대한 지배 미분방정식을 유도하였  
고 전자는 균일한 보에 대하여 동강성법(Dynamic  
stiffness method)을 이용한 유한요소법(F.E.M)으로  
후자는 비 균일보한 보에 대하여 전달행렬 법으로  
베르누이-오일러(Bernoulli-euler)보에 대한 연성된  
굽힘 진동의 고유진동 특성의 해를 구하였다.

본 논문에서도 초기 비틀림각을 가진 균일한 오  
일러 보에 대한 지배 미분방정식을 해밀턴의 원리를  
이용하여 유도 하였으며 수치해석적 방법을 전달 행  
렬법의 형태로 바꾸어 동특성의 해를 구하였다. Lin  
의 연구와의 차이점은 Lin의 경우 장행렬(Field  
matrix)와 점행렬(Point matrix)로 구분되어 전달 행  
렬이 만들어지지만 제안된 방법은 통합된 전달행렬  
만이 존재한다.

제안된 방법은 기존의 전달행렬법과는 다르게 1  
개의 요소만으로도 정확한 해를 구할 수 있다는 장  
점이 있다. 본 논문에서 제안한 방법의 검증을 위하  
여 ANSYS의 결과와 비교 하였다.

### 2. 이 론

#### 2.1 전달행렬법

##### (1) 지배 미분방정식

연성된 굽힘 진동의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$EI_{zz} V'''' - 2k^2(EI_{zz} + 2EI_{yy}) V'' + k^4 EI_{zz} V + 2k(EI_{zz} + EI_{yy}) W'' - 2k^3(EI_{zz} + EI_{yy}) W' - m\omega^2 V = 0 \quad (1)$$

$$EI_{yy} W'''' - 2k^2(EI_{yy} + 2EI_{zz}) W'' + k^4 EI_{yy} W - 2k(EI_{zz} + EI_{yy}) V'' + 2k^3(EI_{zz} + EI_{yy}) V' - m\omega^2 W = 0 \quad (2)$$

식(1-2)로부터 W or V를 소거 할 경우 한 개의  
통합된 미분 방정식을 구할 수 있다.

$$V^{(8)} + 4k^2 V^{(6)} + k^4 \left( 6 - \frac{m\omega^2}{EI_{zz} k^4} - \frac{m\omega^2}{EI_{yy} k^4} \right) V^{(4)} + k^6 \left( 4 + 6 \frac{m\omega^2}{EI_{zz} k^4} + 6 \frac{m\omega^2}{EI_{yy} k^4} \right) V^{(2)} + k^8 \left( 1 - \frac{m\omega^2}{EI_{zz} k^4} \right) \left( 1 - \frac{m\omega^2}{EI_{yy} k^4} \right) = 0 \quad (3)$$

식(3)으로부터 방정식의 해를 구할 수 있고 전달  
행렬의 형태는 다음과 같이 표현된다.

$$\{Z\}_{i+1} = [T_{ij}] \{Z\}_i \quad (4)$$

여기서, Z는 상태벡터 이며 T는 전달 행렬이고,

$$\{Z\}_{i+1} = [w, v, \psi, \phi, -M_z, -M_y, V_y, -V_z]^T$$

$$\{Z\}_i = [w, v, \psi, \phi, M_z, M_y, -V_y, V_z]^T \text{ 이다.}$$

† 교신저자: 정희원, 경기대학교 기계 시스템 공학부  
E-mail : jylee@kgu.ac.kr

Tel : 031-249-9811 , Fax :031-244-6300

\* 한진KPS(주) 기술연구원

\*\* 한양대학교 기계공학부

Fig.1은 초기 비틀림각을 가진 보 요소에 대해 사용된 표기법과 좌표계이다.

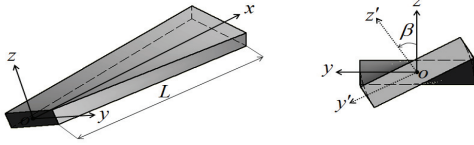


Fig. 1 Coordinate system and notation used for a pre-twisted beam

## 2.2 적용 예

제안된 방법의 검증을 위하여 사용된 물성치는 Table 1과 같다.

Table 1 Material properties for Euler beam

Notation	Description	Value
$EI_{zz}$	Bending stiffness of in-plane	11.2709 N $m^2$
$EI_{yy}$	Bending stiffness of out-of-plane	604.349N $m^2$
m	the mass per unit length	0.5524 kg/m
L	the length of beam	0.2485m

## 2.2 적용 결과

제안된 방법으로 구하여진 오일러보의 고유진동 특성 결과를 ANSYS의 해석결과와 비교 하였으며 Table 2~3은 0, 45, 90도 비틀린 보의 고유진동수 결과 값이다.

Table 2 The natural frequencies for the pre-twisted uniform cantilever beam. (0 and 45 degree)

Mode Number	Natural frequencies (rad/s)			
	$\beta=0$		$\beta=45$	
	Present	ANSYS	Present	ANSYS
1	40.9326	41.152	41.2216	41.413
2	256.5202	257.67	187.5426	188.13
3	299.7323	298.24	408.7907	406.6
4	718.2641	721.02	675.6571	677.65
5	1407.511	1412	1364.266	1366.7

Table 3 The natural frequencies for the pre-twisted uniform cantilever beam. (90 degree)

Mode Number	Natural frequencies (rad/s)		
	$\beta=90$		
	Present	ANSYS	Error(%)
1	42.0638	42.178	0.271
2	136.538	136.95	0.3018
3	507.1519	504.82	-0.4598
4	649.4997	646.89	-0.4018
5	1275.2986	1274.8	-0.0391

Fig. 2~3은 비틀림각이 90도 일때의 진동모드를 나타낸 것이다. Fig. 2에서 점선은 면외 굽힘 진동 모드이고, 실선은 면내 굽힘 진동모드이다. 또한, Fig. 3은 ANSYS를 통하여 얻은 면외, 면내 굽힘 진동 모드의 결과이다.

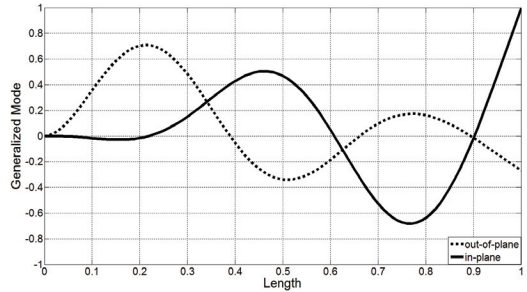
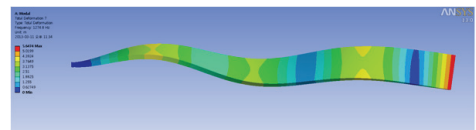
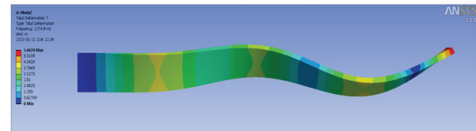


Fig. 2 the fifth mode shape of a 90 degree twisted beam.



(a) Mode shape of in-plane



(b) Mode shape of out-of-plane

Fig. 3 the fifth mode shape obtained using ANSYS.

## 3. 결 론

본 연구에서 제안된 방법으로 구하여진 결과값들은 1개의 요소만으로 구하여진 값들로서 동일한 형상의 길이에서는 1개 요소만으로도 정확해를 구할 수 있다는 것을 ANSYS와의 비교를 통하여 확인할 수 있었다.

1) 1개의 요소만으로도 정확해를 구할 수 있는 방안을 제시하였다.

2) 전달행렬이 장행렬과 점행렬로 이루어지지 않고 하나의 통합된 행렬로 나타낼 수 있는 방안을 제시하였다.

3) 질량이 Massless beam의 중간이 아닌 끝부분에 추가 할 수 있는 방법을 제시하였다.