

동지점 유한요소를 이용한 정정보의 지진해석

Seismic Analysis of Statically Determinate Beams Using Moving Support Finite Elements

김용우† · 이승열* · 정명조**

Yong-Woo Kim, Seung Yeal Lee, Myung Jo Jung

Key Words : Euler-Bernoulli Beam(오일러-베르누이 보), Finite Element Method(유한요소법), Support Accelerations(지점 가속도), Moving Support Elements(동지점 요소), Seismic Analysis(지진해석), Support-free element(비지점 요소)

ABSTRACT

Using moving support finite elements, seismic analysis of statically-determinate beams subjected to support motions is performed to show its accuracy and its ease of use. Examples of cantilever and simply-supported beam subjected to support motions are illustrated and the numerical results are compared with the analytical solutions. The examples show the elements facilitate modeling beams with the conventional 2-noded, Hermitian, Euler-Bernoulli beam element. The comparisons of the results with analytical solutions show good agreements with high accuracy.

기 호 설 명

- $a(t), b(t)$: 지지점의 변위
- $\ddot{a}(t), \ddot{b}(t)$: 지지점의 가속도
- A : 보의 단면적
- EI : 보의 굽힘강성
- l : 보요소의 길이
- L : 보의 길이
- m : 단위 길이당 질량
- x : 보의 전체좌표계
- \hat{x} : 보의 요소좌표계
- $y(x,t)$: 보의 변위
- $\theta(x,t)$: 보의 각변위

1. 서 론

지반 위에 설치되는 구조물들은 지진과 같은 지반

의 운동에 의해 가진되기도 한다. 이와 같은 지반 운동에 의해 가진되는 구조물의 시간영역에서의 응답을 구하는 기법에는 상대운동법(RMM, relative motion method)과 거대질량법(LMM, large mass method)을 있다⁽¹⁾. 전자는 변위를 동적 성분과 준정적 변위로 구성되어 있다는 준정적 분해법⁽²⁾을 적용하여 응답을 구하며, 후자는 지지점에 가상의 거대 질량을 부착하여 이에 (거대질량)X(지반 가속도)의 외력을 가하여 구조물의 응답을 구한다. 특히 후자의 거대질량법은 정확한 이론적 검증이 없이 여러 상용 유한요소해석 프로그램들에서 제안되어 사용되고 있다^(3,4). 이 방법의 단점은 거대질량 대 전체구조물의 질량비의 값에 따라 해의 정확도가 달라진다 점이다. 그러나 사용의 간편성 때문에 많은 엔지니어들이 선호하고 있다. 이와 같이 거대질량법의 사용을 선호하는 주된 이유 중의 하나가 상대운동법의 사용이 거대질량법에 비해 다소 까다롭다는 사실에 기인한다. 이점에 해결하기 위해 Kim 등⁽⁵⁾은 상대변위법에서 채용하는 준정적 분해법을 이용하여 기존의 C1-연속 Hermite 보요소와 함께 사용할 수 있는 동지점 요소를 개발하였다. 이 요소를 사용하면 지지점의 운동에 의해 가진되는 보를 쉽게 모델링할 수 있을 뿐만 아니라 절대변위를 구할 수 있다.

† 교신저자; 정희원, 순천대학교 기계공학과
E-mail : kyw@sunchon.ac.kr
Tel : 061-750-3536, Fax : 061-750-3530
* 순천대학교 대학원 기계공학과
** 한국원자력안전기술원

본 연구에서는 동지점 요소를 사용하여 정정보가 실제의 지진 가속도를 받는 경우에 대해 지진해석을 실시하고 그 정확도를 검토하기 위해 수치해석 결과를 이론해와 비교하고자 한다.

2. 동지점 요소

동지점 요소의 수식화 과정에 대한 기술은 생략하고, 동지점 요소의 요소방정식과 이 요소를 사용한 모델링 방법에 대해 기술한다.

2.1 지지점의 운동에 의해 가진 되는 보

건물이나 배관설비와 같이 지면 또는 벽에 부착된 보 구조물(Fig. 1, 2 참조)들이 지지점의 운동에 의해 가진 되는 경우가 많다. 이 경우, 구조물은 구조물 자체에 직접적으로 작용되는 외력에 의해 가진 되는 것이 아니고 관성력과 같은 동적 저항력에 의해 가진된다. 이러한 문제들은, 경계조건이 시간의 함수로 주어지는 시간의존성 경계조건(time-dependent boundary condition)을 갖는 동적 문제로서, 이들의 해는 모드 해석을 채용하는 준정적 분해법을 사용하여 구한다. 준정적 분해법은 Mindlin과 Goodman⁽²⁾이 개발한 방법으로, 경계조건으로부터 시간의존성을 제거한 다음, 통상의 자유진동 또는 강제진동의 문제로 변환시켜 기존의 고전적 방법이나 수치적 방법을 통해 해를 구한다.

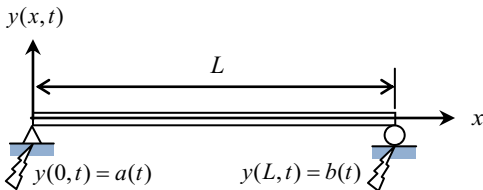


Fig. 1 A simply-supported beam subjected to support motions, $a(t)$ at $x=0$ and $b(t)$ at $x=L$



Fig. 2 Cantilever subjected to a support motion

2.2 동지점 요소의 요소방정식

지지점의 운동에 의해 가진되는 보를 유한요소로

모델링하는 경우, 전통적인 2 절점 보요소와 함께 4 가지의 동지점요소를 사용하여 모델링한다. Fig. 3 은 전통적인 2 절점 보요소를 도시한 것으로, 왼쪽 절점번호를 i 로, 오른쪽 절점 번호를 j 로 표시하였다. 지지점을 포함하지 않은 요소(비지지점 요소, support-free element)의 요소방정식은 다음과 같다.

$$[m^{(e)}]\{\ddot{y}^{(e)}\} + [k^{(e)}]\{y^{(e)}\} = \{\hat{f}^{(e)}\} + \{\hat{f}_0^{(e)}\} \quad (1)$$

여기서

$$[m^{(e)}] = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[k^{(e)}] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad \{y^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$\{\hat{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_i^{(e)} \\ \hat{m}_i^{(e)} \\ \hat{f}_j^{(e)} \\ \hat{m}_j^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{f}_0^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \int_0^l \hat{g}^{(e)}(\hat{x}, t) N_1(\hat{x}) d\hat{x} \\ 0 \\ \int_0^l \hat{g}^{(e)}(\hat{x}, t) N_2(\hat{x}) d\hat{x} \\ 0 \\ \int_0^l \hat{g}^{(e)}(\hat{x}, t) N_3(\hat{x}) d\hat{x} \\ 0 \\ \int_0^l \hat{g}^{(e)}(\hat{x}, t) N_4(\hat{x}) d\hat{x} \end{Bmatrix}$$

이고, $\{\hat{f}^{(e)}\}$ 는 요소의 절점에 작용하는 집중하중벡터이고, $\{\hat{f}_0^{(e)}\}$ 는 동적 저항력에 의한 분포하중, $\hat{g}^{(e)}(\hat{x}, t)$ 의 등가절점하중벡터이며, $N_i(\hat{x})$, ($i=1, 2, 3, 4$)는 Hermite 형상함수이다.

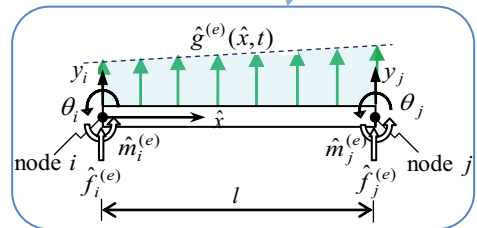
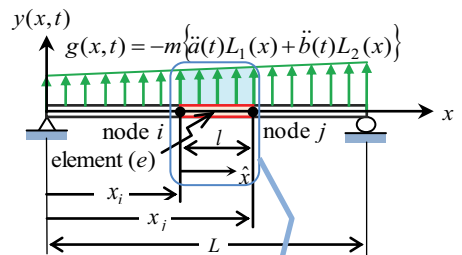


Fig. 3 A Euler-Bernoulli beam element

(1) 왼쪽 단순지점요소(left-hinged element)

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 13l & 156 & -22l \\ -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{y}_j \\ \ddot{\theta}_j \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 12 & -6l \\ 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -22\ddot{y}_{si} \\ -54\ddot{y}_{sj} \\ 13\ddot{y}_{si} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} -6ly_{si} \\ 12y_{si} \\ -6ly_{si} \end{Bmatrix}$$

(2)

여기서 y_{si} , y_{sj} 및 \ddot{y}_{si} , \ddot{y}_{sj} 는 절점 i 및 j 에서의 준정적 변위 및 가속도로써 다음과 같이 계산된다.

$$y_{si}(t) = a(t)L_1(x_i) + b(t)L_2(x_i) \quad (3)$$

$$y_{sj}(t) = a(t)L_1(x_j) + b(t)L_2(x_j) \quad (4)$$

$$\ddot{y}_{si}(t) = \ddot{a}(t)L_1(x_i) + \ddot{b}(t)L_2(x_i) \quad (5)$$

$$\ddot{y}_{sj}(t) = \ddot{a}(t)L_1(x_j) + \ddot{b}(t)L_2(x_j) \quad (6)$$

여기서 $L_1(x) = 1 - x/L$, $L_2(x) = x/L$ ($0 \leq x \leq L$) 이고, x_i 와 x_j 는 절점 i 및 j 의 전체좌표이다. 단 외팔보의 경우 지지점이 하나이므로 위 식에서 $a(t) = b(t)$ 및 $\ddot{a}(t) = \ddot{b}(t)$ 로 적용하여 계산한다.

(2) 오른쪽 단순지점요소(right-hinged element)

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & -13l \\ 22l & 4l^2 & -3l^2 \\ -13l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_i \\ \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_j \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & 6l \\ 6l & 4l^2 & 2l^2 \\ 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -54\ddot{y}_{sj} \\ -13\ddot{y}_{sj} \\ 22\ddot{y}_{sj} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} 12y_{sj} \\ 6ly_{sj} \\ 6ly_{sj} \end{Bmatrix}$$

(7)

(3) 왼쪽 고정지점요소(left-fixed element)

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_j \\ \ddot{\theta}_j \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -54\ddot{y}_{si} \\ 13\ddot{y}_{si} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} 12y_{si} \\ -6ly_{si} \end{Bmatrix}$$

(8)

(4) 오른쪽 고정지점요소(right-fixed element)

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l \\ 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -54\ddot{y}_{sj} \\ -13\ddot{y}_{sj} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} 12y_{sj} \\ 6ly_{sj} \end{Bmatrix}$$

(9)

2.3 등지점 요소를 이용한 모델링

Fig. 4에 양단 단순지점보와 외팔보의 경우에 대한 등지점요소 및 비지점 요소를 사용한 요소분할을 예시하였다.

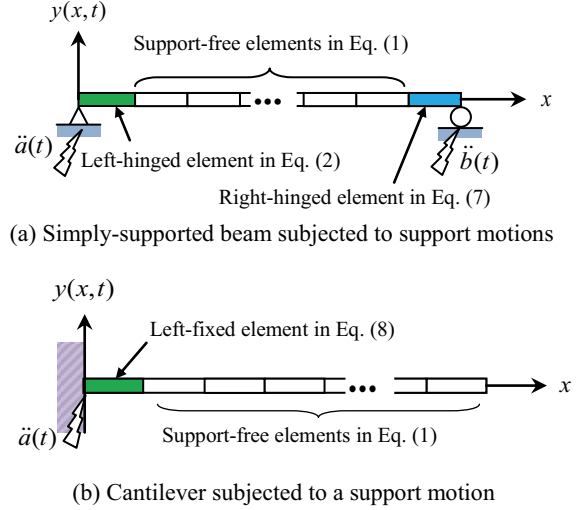


Fig. 4 Discretization of typical beams subjected to support motions.

3. 유한요소해석

등지점요소의 정확도를 확인하기 위하여 외팔보가 고정단에서 지진 가속도를 받는 경우와 양단 단순지지보가 양단에서 동일한 지진가속도를 받는 경우에 대해 유한요소 동해석을 실시하였다.

여기서 사용한 지반의 지진 가속도($\ddot{a}(t)$)는 Fig. 5와 같다. 그리고 입력 데이터는 다음과 같다.

• 외팔보:

$$EI = 2.08 \times 10^7 \text{ Nm}^2$$

$$m = 67.4388 \text{ kg/m}$$

• 양단 단순지지보

$$EI = 2.64 \times 10^9 \text{ Nm}^2$$

$$m = 2400 \text{ kg/m}$$

외팔보는 20개의 보요소로 균등하게 분할하여 모델링하였으며, 동해석을 위해 Newmark method를 사용하였으며, 이때 사용한 시간증분은 $\Delta t = 0.5 \times 10^{-3} \text{ sec}$ 이다. 양단 단순지지보의 경우, 20개의 보요소로 균등하게 분할하여 모델링하였고, 시간증분은 $\Delta t = 0.5 \times 10^{-3} \text{ sec}$ 을 사용하였다.

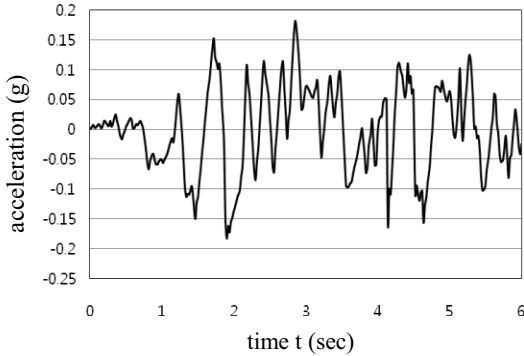


Fig. 5 The ground acceleration time history, which is the east-west direction accelogram for the first six seconds recorded at the El Centro site in the Imperial Valley irrigation district on May 18, 1940.

외팔보에 대한 유한요소해석 결과들을 이론해와 함께 Table 1에 도시하였다. Table 1 (a)에서는 자유단($x = 20\text{ m}$)에서의 변위, 속도, 가속도의 응답을 도시하였으며, Table 1 (b)에서는 $t = 4.6\text{ sec}$ 일 때 (0~6 sec 사이에서 최대 전단력이 나타나는 시각)의 변위, 기울기, 굽힘모멘트 및 전단력의 분포를 도시하였다. Table 1에서 보는 바와 같이 수치해석 결과들은 이론해와 잘 부합하고 있음을 알 수 있다.

양단 단순지지보에 대한 유한요소해석 결과들을 이론해와 함께 Table 2에 도시하였다. Table 2 (a)에서는 보의 중앙($x = 30\text{ m}$)에서의 변위, 속도, 가속도의 응답을 도시하였으며, Table 2 (b)에서는 $t = 5.6\text{ sec}$ 일 때(0~6 sec 사이에서 최대 전단력이 나타나는 시각)의 변위, 기울기, 굽힘모멘트 및 전단력의 분포를 도시하였다. Table 2에서 보는 바와 같이 수치해석 결과들은 이론해와 잘 부합하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

지지점에서 지반 가속도를 받아 가진되는 정정보의 지진해석을 위해 개발된 동지점요소의 정확도를 검증하기 위해, 실제 지진가속도를 받아 가진되는 외팔보 및 양단 단순지지보에 대한 지진해석을 실시하고, 해석 결과들을 이론해와 비교하였다. 수치해석 결과들은 변위, 속도, 가속도에 대한 시간응답뿐만 아니라 굽힘모멘트 및 전단력도 이론해와 매우 잘 일치함을 확인하였다. 그리고 지지점에서 지

반 가속도를 받는 경우, 동지점 요소를 이용한 요소 분할방법을 제시하였다.

후 기

본 연구는 한국원자력안전기술원의 지원을 받아 수행함.

참 고 문 헌

- (1) P. Léger, I. M. Idé and P. Paultre, 1990, Multiple-support seismic analysis of large structures, *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 6, pp. 1153~1158.
- (2) R. D. Mindlin and L. E. Goodman, 1950, Beam vibrations with time-dependent boundary conditions, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 17, pp. 377~380.
- (3) Y.-W. Kim and M. J. Jhung, 2011, Mathematical analysis using two modeling techniques for dynamic responses of a structure subjected to a ground acceleration time history, *Nuclear Engineering and Technology*, Vol. 43, No. 4, pp. 361~374.
- (4) MSC/NASTRAN User's Guide, 2002, V70 Advanced Dynamic Analysis.
- (5) Y.-W. Kim and M. J. Jhung, 2013, Moving support elements for dynamic finite element analysis of statically determinate beams subjected to support motions, *Transaction of the KSME A*, Vol. 37, No. 4 (to be published).

Table 1 Cantilever subjected to seismic acceleration time history at the fixed end ($NEL=20$, $\Delta t = 0.0005$ s)

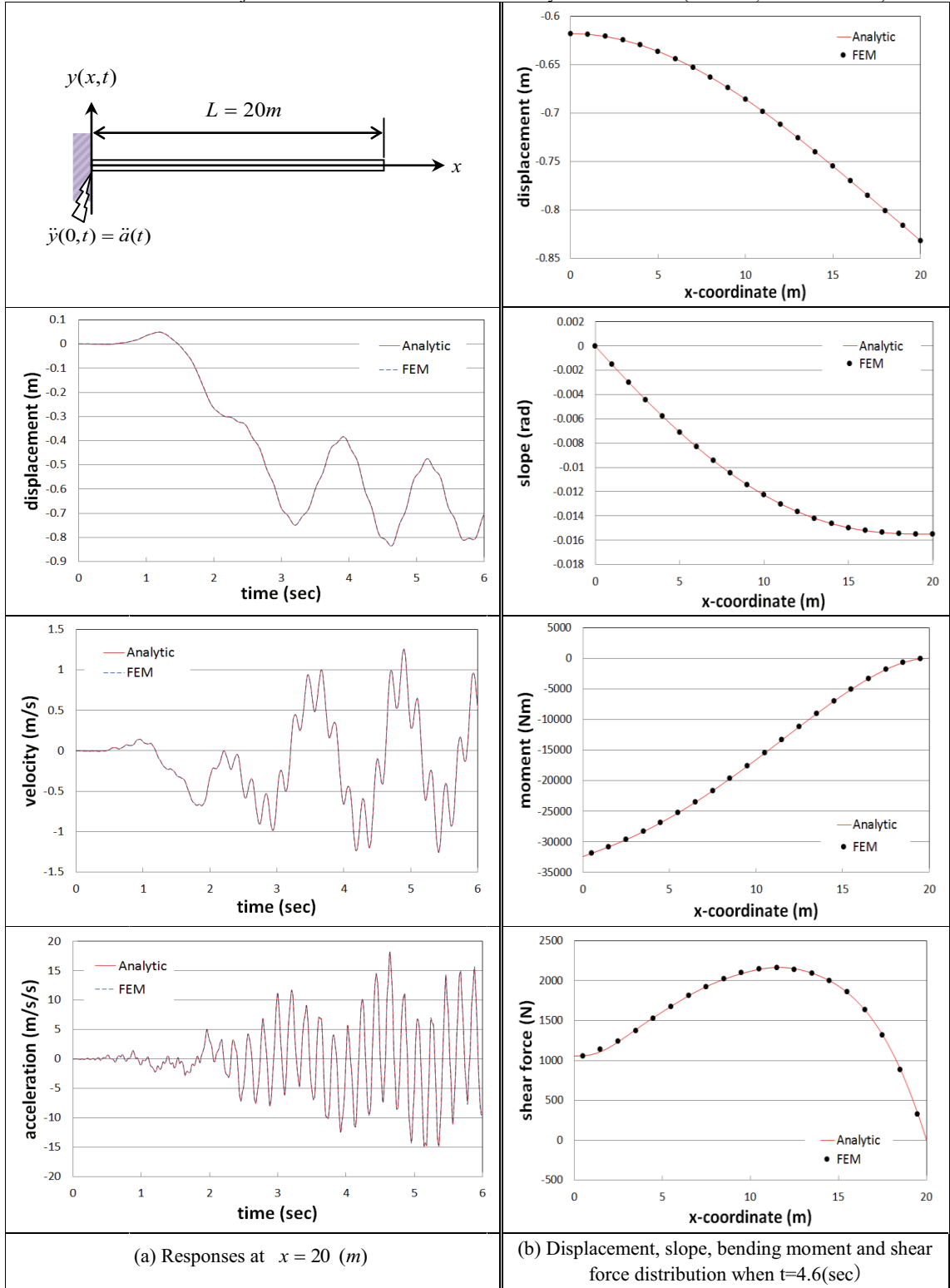


Table 2 Simply-supported beam subjected to seismic acceleration time history at both ends (NEL=20, $\Delta t = 0.0005$ s)

