

지지점 가속도에 의해 가진되는 보의 응력계산에 대한 거대질량법의 정확도

Numerical Tests of Large Mass Method for Stress Calculation of Euler-Bernoulli Beams Subjected to Support Accelerations

김용우† · 최남석* · 정명조**

Yong-Woo Kim, Nam Seok Choi, Myung Jo Jung

Key Words : Euler-Bernoulli Beam(오일러-베르누이 보), Large Mass Method(거대질량법), Support Accelerations(지지점 가속도), Quasi-static decomposition method(준정적 분해법)

ABSTRACT

The large mass method for dynamic analysis of statically determinate beams subjected to in-phase support motions is justified by showing that the equation of motion of the beams under consideration is equivalent to that of large mass model of the beam when an appropriate large mass ratio is employed. The accuracy of the stress responses based on the beam large mass method is investigated through careful numerical tests. The numerical results are compared to analytic solutions and the comparison shows that the large mass method yields not only the time history of motion but also the distributions of bending moment and shear force accurately.

기 호 설 명

- A : 보의 단면적
- EI : 보의 굽힘강성
- L : 보의 길이
- m : 단위 길이당 질량
- M : 거대질량

1. 서 론

지반 위에 설치되는 구조물들은 지진과 같은 지반의 운동에 의해 가진된다. 이와 같은 지반 운동에 의해 가진된 구조물의 시간영역에서의 응답을 구하는 수치적 기법에는 상대운동법(RMM, relative motion method)과 거대질량법(LMM, large mass me-

thod)이 있다⁽¹⁾. 전자는 변위를 동적 성분과 준정적 변위로 구성되어 있다는 준정적 분해법⁽²⁾을 적용하여 응답을 구하며, 후자는 지지점에 가상의 거대 질량을 부착하여 이에 (거대질량) \times (지반 가속도)의 외력을 가하여 구조물의 응답을 구한다. 특히 후자의 거대질량법은 정확한 이론적 검증이 없이 여러 상용 유한요소해석 프로그램들에서 제안되어 사용되고 있다. 이 방법의 단점은 거대질량 대 전체구조물의 질량비의 값에 따라 해의 정확도가 달라진다는 점이다^(3,4). 그러나 사용이 간편하여 여전히 많은 엔지니어들이 사용하고 있다. 그럼에도 불구하고 이 방법의 이론적 정당화 작업이나 이론적으로 적용할 수 있는 한계 등에 대한 연구가 부족한 형편이다. 따라서 거대질량법에 대한 철저한 검증과 이론적 검토에 대한 연구가 필요하다고 판단된다. 또한 대부분의 연구가 지지점 가진으로 인한 운동(변위, 속도, 가속도의 시간이력)에 그치고 있을 뿐만 아니라 구한 운동을 이론해와 비교하지 않고 다른 수치해법에 의한 해와 비교하고 있어 그 정확도를 정확히 판단하는데 문제가 있어 보인다.

위와 같은 배경에서 본 연구에서는 지지점 가진으

† 교신저자; 정회원, 순천대학교 기계공학과
E-mail : kyw@sunchon.ac.kr
Tel : 061-750-3536, Fax : 061-750-3530

* 순천대학교 대학원 기계공학과

** 한국원자력안전기술원

로 인한 운동뿐만 아니라 응력(굽힘모멘트 및 전단력)의 정확도를 검증하기 위하여 정정보가 지지점의 운동에 의해 가진 되는 문제에 대해 거대질량법을 적용하여 수치해를 구하고 이를 이론해와 비교한다. 이때 이론해는 준정적 분해법을 적용하여 구하였다.

2. 거대질량법의 역학

2.1 단순지지보의 운동방정식

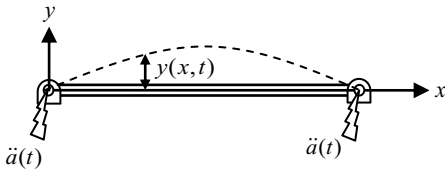


Fig. 1 Simply-supported beam

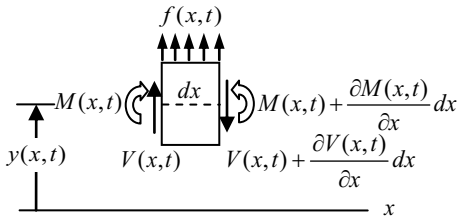


Fig. 2 Put table title put table

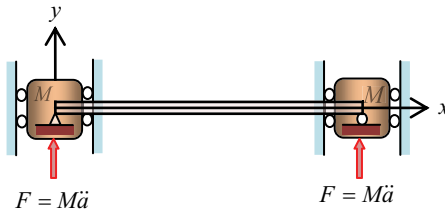


Fig. 3 Large mass model of simply-supported beam

(1) 단순지지보의 운동방정식

Fig. 1과 같이 양단이 단순지지된 보가 양 지지점에서 가속도를 받을 경우의 운동방정식, 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다.

- 운동방정식:

$$m\ddot{y}(x, t) + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad \text{for } 0 < x < L \quad (1)$$

- 경계조건:

$$y(x, t)|_{x=0} = a(t) \quad (2)$$

$$y''(x, t)|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

$$y(x, t)|_{x=L} = a(t) \quad (4)$$

$$y''(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (5)$$

- 초기조건:

$$y(x, t)|_{t=0} = y_0(x) \quad (6)$$

$$\dot{y}(x, t)|_{t=0} = \dot{y}_0(x) \quad (7)$$

여기서 문자 위의 점은 시간에 관한 미분을 의미하며, 빗금은 x 축에 관한 미분을 의미한다.

오일러-베르누이 보에서 굽힘모멘트와 전단력은 다음과 같이 정의된다(Fig. 2참조).

$$M = EIy''(x, t) \quad (8)$$

$$V = (EIy''(x, t))' \quad (9)$$

(2) 거대질량법의 운동방정식

거대질량법은 Fig. 3에 보인 바와 같이, 지반에 의해 운동하는 지지점에 거대질량을 부착하여 지지점이 지반의 운동을 따라가도록 하는 모델링 기법이다. Fig. 3의 거대질량법에 따른 모델의 운동방정식, 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다.

- 운동방정식:

$$m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} \quad \text{for } 0 < x < L \quad (10)$$

- 경계조건:

$$y''(x, t)|_{x=0} = 0 \quad (11)$$

$$EIy'''(x, t)|_{x=0} = -M\ddot{y}_i(0, t) + M\ddot{a}(t) \quad (12)$$

$$y''(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (13)$$

$$EIy'''(x, t)|_{x=L} = M\ddot{y}_i(L, t) - M\ddot{a}(t) \quad (14)$$

- 초기조건:

$$y(x, t)|_{t=0} = y_0(x), \quad \dot{y}(x, t)|_{t=0} = \dot{y}_0(x) \quad (15)$$

2.2 거대질량 모델의 역학

거대질량법은 구조물의 지점이 동적 변위 또는 가속도로 운동하는 문제에서 지점이 주어진 변위

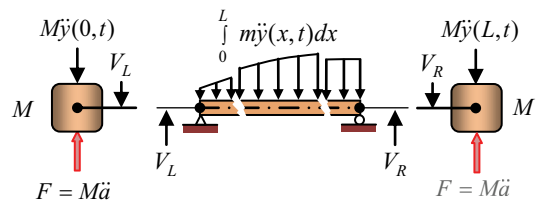


Fig. 4 Free body diagrams of the large mass model of simply-supported beam subjected to $F = M\ddot{a}(t)$ at both supports, where the diagrams are depicted based on

D'Alembert's principle

($a(t)$) 또는 가속도($\ddot{a}(t)$)로 운동하도록 강제하기 위해 지점에 거대질량(M)을 부착하고, 이 거대질량에 외력, $F(t) = M\ddot{a}(t)$ 을 가하여 지지점에 주어진 운동을 재현시키는 방법이다. 이때 재현된 변위, 속도, 가속도를 각각 $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ 라 하면, $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ 가 우리가 바라는 정확한 운동($a(t)$, $\dot{a}(t)$, $\ddot{a}(t)$)으로 재현되도록 하기 위한 조건이 무엇인지에 대해 고찰하기 위해 운동방정식을 검토한다.

Fig. 4의 자유물체도를 참조하여 양단의 거대질량과 보의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

- 왼쪽 거대질량의 운동방정식:

$$M\ddot{y}(0,t) = M\ddot{a} - V_L \quad \text{or} \quad \ddot{y}(0,t) = \ddot{a} - \frac{V_L}{M} \quad (16)$$

- 오른쪽 거대질량의 운동방정식:

$$M\ddot{y}(L,t) = M\ddot{a} - V_R \quad \text{or} \quad \ddot{y}(L,t) = \ddot{a} - \frac{V_R}{M} \quad (17)$$

- 보의 운동방정식:

$$\int_0^L m\ddot{y}(x,t)dx = V_L + V_R = M\{2\ddot{a} - (\ddot{y}(0,t) + \ddot{y}(L,t))\} \quad (18)$$

식 (18)의 양변을 M 으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{mL}{M} \ddot{y}_{av} = \frac{V_L + V_R}{M} = \{2\ddot{a} - (\ddot{y}(0,t) + \ddot{y}(L,t))\} \quad (19)$$

여기서 $\ddot{y}_{av} = \left(\int_0^L m\ddot{y}(x,t)dx\right) / mL$ 이다.

그런데 보의 수직 중앙선에 대해 대칭이고 양단의 거대질량에 동일한 힘에 가해지고 있으므로 보의 응답도 대칭이어야 한다. 따라서 양단의 가속도가 동일할 것이고, Fig. 4에서 양단의 거대질량에 작용하는 힘 간에 $V_L = V_R$ 의 관계가 성립하여야 한다. 가속도가 $\ddot{y}|_{x=0} = \ddot{y}|_{x=L}$ 이기 위해서는 식 (16), (17), (19)에서 각각 다음 식을 만족하여야 한다.

$$V_L / M = 0 \quad (20)$$

$$V_R / M = 0 \quad (21)$$

$$(V_L + V_R) / M = 0 \quad (22)$$

위의 세 식 (20)-(22)를 동시에 만족시키기 위해서는 V_L / M 과 V_R / M 이 각각 영이어야 한다. 그런데 식 (22)에서 $(V_L + V_R) / M = 0$ 이려면 $V_L = V_R$ 이므로 $mL / M = 0$ 이어야 한다. 따라서 $mL / M = 0$ 이 만족되면 식 (20)-(22)를 동시에 만족됨을 알 수 있다. 위의 분석 결과를 정리하면 다음과 같다.

정리

단순지지보의 거대질량 모델의 양 지지점에 있는 거대질량에 $F = M\ddot{a}(t)$ 를 가할 때,

$mL / M \rightarrow 0$ 이면

$$(1) \quad \ddot{y}(0,t) \rightarrow \ddot{a}, \quad \ddot{y}(L,t) \rightarrow \ddot{a}.$$

$$(2) \quad V_L / M \rightarrow 0, \quad V_R / M \rightarrow 0.$$

여기서, V_L 과 V_R 은 각각 다음과 같다.

$$V_L = M\{\ddot{y}(0,t) - \ddot{a}\}, \quad V_R = M\{\ddot{y}(L,t) - \ddot{a}\}.$$

즉, 위의 정리에 따르면 거대질량 모델의 양단에 각각 $F = M\ddot{a}(t)$ 를 가할 때, $mL / M \rightarrow 0$ 이면 양단은 각각 $\ddot{y}(0,t) = \ddot{a}$ 및 $\ddot{y}(L,t) = \ddot{a}$ 로 운동함을 알 수 있다. 그런데 $\ddot{y}(0,t) = \ddot{a}$ 및 $\ddot{y}(L,t) = \ddot{a}$ 와 식 (15)의 초기조건으로부터 $y(0,t) = a$ 및 $y(L,t) = a$ 을 얻을 수 있다. 따라서 거대질량 모델의 양단에 각각 $F = M\ddot{a}(t)$ 를 가할 때, $mL / M \rightarrow 0$ 이면, 거대질량 모델의 방정식 (10)-(15)는 양단에 작용하는 가속도에 의해 가진 되는 단순지지보의 방정식 (1)-(7)과 일치하게 됨을 알 수 있다. 즉, Fig. 3의 거대질량 모델은, $mL / M \rightarrow 0$ 이면 Fig. 1의 모델과 근사적으로 동일하게 된다.

2.3 거대질량 모델의 유한요소 방정식

Fig. 5는 거대질량 모델을 n 개의 균등한 요소로 모델링한 그림이다. Fig. 5의 거대질량 모델에 대한 유한요소 방정식이 $mL / M \rightarrow 0$ 일 때 지지점에서의 가속도를 어떻게 재현해내는지에 대해 고려해 보자.

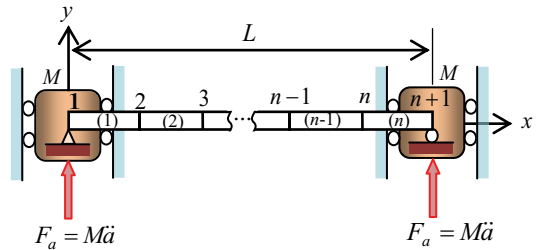


Fig. 5 Finite element discretization of large mass model

Fig. 5의 요소 (1)에 대한 유한요소 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 + \frac{420}{ml}M & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M\ddot{a}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서 l 은 요소의 길이로서 $l=L/n$ 이다. 그런데 요소(1)은 y_1 과 θ_1 을 다른 요소들과 공유하지 않으므로, y_1 과 θ_1 은 식 (23)의 첫 번째 방정식에 의해 결정된다. 따라서 mL/M 의 크기에 따른 y_1 과 θ_1 의 정확도를 살펴보기 위해 식 (23)의 첫 번째 방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{ml}{420} \left\{ \left(156 + \frac{420}{ml} M \right) \ddot{y}_1 + 22l\ddot{\theta}_1 + 54\ddot{y}_2 - 13l\ddot{\theta}_2 \right\} + \frac{EI}{I^3} \{ 12y_1 + 6l\theta_1 - 12y_2 + 6l\theta_2 \} = M\ddot{a} \quad (24)$$

식 (24)의 양변에서 $M\ddot{y}_1$ 을 빼면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{ml}{420} \{ 156\ddot{y}_1 + 22l\ddot{\theta}_1 + 54\ddot{y}_2 - 13l\ddot{\theta}_2 \} + \frac{Emr^2}{I^3} \{ 12y_1 + 6l\theta_1 - 12y_2 + 6l\theta_2 \} = M(\ddot{a} - \ddot{y}_1) = V_L \quad (25)$$

여기서, $I=mr^2$ 이고 r 은 회전관성 반경이다. 식 (25)의 양변을 M 으로 나누면

$$\frac{V_L}{M} = \frac{1}{n} \frac{mL}{M} \cdot \frac{1}{420} (156\ddot{y}_1 + 22l\ddot{\theta}_1 + 54\ddot{y}_2 - 13l\ddot{\theta}_2) + n^3 \frac{mL}{M} \cdot \frac{Er^2}{L^4} (12y_1 + 6l\theta_1 - 12y_2 + 6l\theta_2) = \ddot{a} - \ddot{y}_1 \quad (26)$$

그런데 앞 절의 정리로부터 $mL/M \rightarrow 0$ 일 때 $V_L/M \rightarrow 0$ 이므로, $mL/M \rightarrow 0$ 이면 $\ddot{y}_1 \rightarrow \ddot{a}$ 이다. 따라서 $mL/M \rightarrow 0$ 이면 지지점에서의 가속도가 재현됨을 알 수 있다.

위와 동일한 방법으로 $mL/M \rightarrow 0$ 이면 $\ddot{y}_{n+1} \rightarrow \ddot{a}$ 임을 보일 수 있다.

3. 수치실험 및 검토

거대질량비($\alpha = M/mL$)의 크기에 따른 수치해의 정확도를 검토하기 위하여, 보를 균등한 길이의 20개의 요소로 모델링하였으며, 동해석을 위해 Newmark method(시간증분, $\Delta t = 10^{-3}$)를 사용하였다.

ANSYS를 사용하여 거대질량비(α)를 10^0 부터 10^{16} 까지 변화시키면서 이에 따른 절대운동 및 최대 전단력이 발생하는 시각{외팔보의 경우 $t=0.7$ (s), 양단 지지보의 경우 $t=0.1$ (s)}에서의 변위, 기울기, 굽힘모멘트 및 전단력의 분포를 구하여 표 1 및 표 2에 각각의 이론해와 비교하였다. 여기서, 외팔보의 경우 $\alpha = 10^{13}$ 이상인 경우, 그리고 양단 단순지지보의 경우에는

$\alpha = 10^{12}$ 이상인 경우에 대해서는, 수치해의 값이 너무 커서 표 1과 표 2에 도시하지 않았다.

표 1과 2로부터 다음의 사실을 확인할 수 있다. 첫째 거대질량비가 너무 작거나($\alpha = 10^0 \sim 10^2$) 너무 크면{ $\alpha \geq 10^{13}$ (외팔보의 경우), $\alpha \geq 10^{12}$ (단순지지보의 경우)} 수치해는 큰 오차를 보이며, 거대질량비가 $\alpha = 10^3 \sim 10^{12}$ (외팔보) 및 $\alpha = 10^3 \sim 10^{11}$ (단순지지보)일 경우, 수치해는 이론해와 잘 일치한다.

4. 결 론

거대질량법을 이용하여 동일 위상의 다지점운동(in-phase, multi-support motions)에 의해 가진되는 정정보에 대한 동해석에 있어, 다음의 사실을 보였다. 첫째, 지지점의 운동을 받는 정정보에 대한 미분방정식은 거대질량비가 적절히 큰 값으로 설정된 거대질량 모델의 미분방정식과 근사적으로 등가의 관계에 있음을 보였으며, 둘째 거대질량비 $\alpha = 10^3 \sim 10^{11}$ 을 사용하면 운동(변위, 속도, 가속도)에 대한 응답뿐만 아니라 응력(굽힘모멘트 및 전단력으로부터 구한다)의 분포를 매우 정확하게 계산할 수 있음을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국원자력안전기술원의 지원을 받아 수행함.

참 고 문 헌

- (1) P. Léger, I. M. Idé and P. Paultre, 1990, Multiple-support seismic analysis of large structures, *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 6, pp. 1153~1158.
- (2) R. D. Mindlin and L. E. Goodman, 1950, Beam vibrations with time-dependent boundary conditions, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 17, pp. 377~380.
- (3) Y.-W. Kim and M. J. Jung, 2011, Mathematical analysis using two modeling techniques for dynamic responses of a structure subjected to a ground acceleration time history, *Nuclear Engineering and Technology*, Vol. 43, No. 4, pp. 361~374.
- (4) MSC/NASTRAN User's Guide, 2002, V70 Advanced Dynamic Analysis.

Table 1 Cantilever subjected to simple acceleration time history at fixed end (NEL=20, $\Delta t = 0.001$ s)

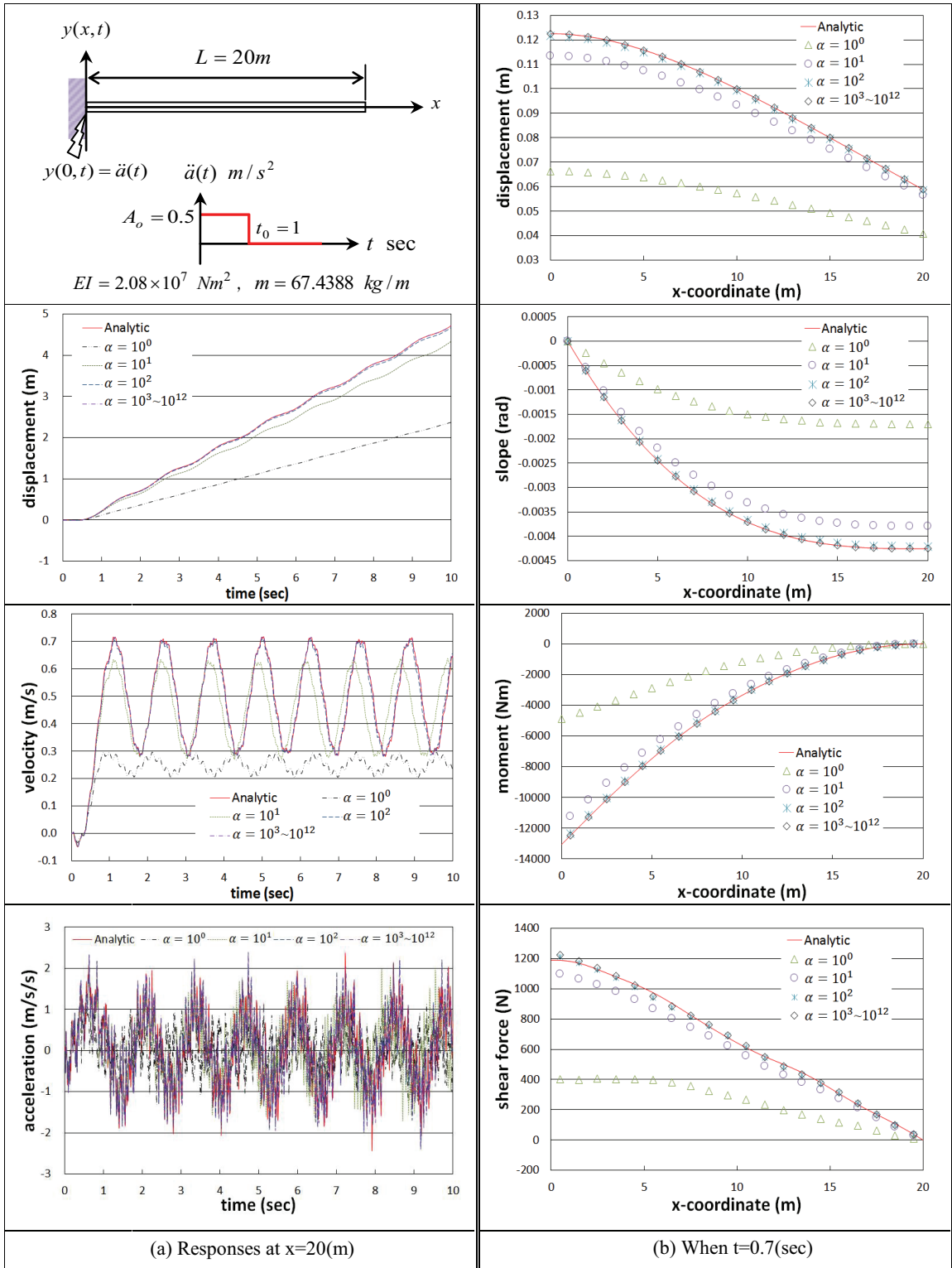


Table 2 Simply-supported beam subjected to simple acceleration time history at both ends (NEL=20, $\Delta t = 0.001$ s)

