

평판의 고정밀도 고유치 해석을 위한 새로운 MNDIF 법 정식 개발

New Formulation of MNDIF Method for Eigenvalue Analysis of Plates

강상욱†
Sang Wook Kang

Key Words : plate(평판), eigenvalue(고유치), free vibration(자유진동), arbitrary shape(임의 형상), MNDIF method(개선된 무차원 동영향 함수법)

ABSTRACT

A new formulation of the MNDIF method is introduced to extract highly accurate natural frequencies of concave plates with arbitrary shape. Originally, the MNDIF method cannot yield accurate natural frequencies for concave plates. To overcome this weak point, a new approach of dividing a concave plate into two convex domains is proposed and the validity and accuracy is shown in a verification example.

1. 서 론

임의 형상 평판의 고유치 해석에 가장 일반적으로 사용되는 방법은 유한요소법⁽¹⁾과 경계요소법⁽²⁾을 이용하는 것이다. 이들 방법들은 해석 대상 평판을 여러 개의 노드들로 분할한 후 노드들 사이에는 보간 함수를 사용한다. 그러나 이 보간 함수가 평판의 자유 진동 지배방정식을 만족하지 않기 때문에, 얻어진 고유치의 정밀도는 어떤 한계를 가진다.

저자는 상기 단점을 극복하기 위해 NDIF 법(Non-dimensional Dynamic Influence Function Method)을 개발하여, 다양한 경계조건을 가진 임의 형상 멤브레인과 평판의 고정밀도 고유치를 얻을 수 있는 방법들을 제안하였다⁽³⁻⁹⁾. 그러나 NDIF 법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 시스템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되는 단점을 가진다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 저자는 NDIF 법을 대수 고유치 문제로의 정식화하는 연구⁽¹⁰⁾를 수행하여, 시스템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되는 문제점을 해결한 MNDIF 법(Modified NDIF 법) 개발을 성공하였다. 그러나 개발된 MNDIF 법은 평판의 형상이 오목한 형태일 때는 정확한 고유치를 제공하지 못함이 확인되었으며, 이를 극복하기 위한 새

로운 연구가 본 논문에서 제안된다. 참고로 본 논문에서는 단순지지 경계조건을 가진 임의 형상 평판에 대한 이론 정식화가 이루어지며, 고정단이나 자유단 경계 조건을 가진 평판에 대한 이론 정식화는 향후 연구에서 제안된다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계 조건

단순지지 경계조건을 가진 평판은 고정 경계(fixed edges)를 가진 멤브레인과 이론적 유사성을 가지기 때문에, 평판의 자유 진동 지배방정식은 식(1)과 같이 멤브레인 지배방정식(헤름홀츠 방정식)으로 대체될 수 있다^(10,11).

$$\nabla^2 W + \Lambda^2 W = 0, \quad (1)$$

여기서 W 는 평판의 진동변위를 나타내며 Λ 는 주파수 파라미터를 의미한다.

식(1)에 고정 경계 조건(변위가 0인 조건),

$$W_\Gamma = 0, \quad \Gamma : \text{경계} \quad (2)$$

을 적용하는 방법에 의해 구해진 고유치 Λ_i 를 식(3)에 적용하여 최종적으로 평판의 고유진동수 f_i 를 구할 수 있다^(10,11).

$$f_i = \frac{\Lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}} \quad (3)$$

여기서 ρ_s 는 평판의 면밀도, $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ 는 평판의 강성(flexural rigidity)을 뜻한다.

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : (02) 760-4228, Fax : (02) 760-4329

2.2 영역 분할 및 경계조건 적용

Fig. 1에서 실선으로 표시된 해석 대상 오목 평판은 두 개의 볼록 영역 D_I 와 D_{II} 로 분할 된다. 영역 D_I 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 는 각각 노드 $P_1^{(I)}, P_2^{(I)}, \dots, P_{N_1}^{(I)}$ 와 $P_1^{(a)}, P_2^{(a)}, \dots, P_{N_a}^{(a)}$ 로 이산화된 후, 영역 D_I 의 내부 한 점에서의 진동 변위 응답은 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정된다⁽⁹⁾.

$$W_I(\mathbf{r}^{(I)}) = \sum_{s=1}^{N_1} A_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \quad (4)$$

여기서 J_0 는 제 1 종 0 차 베셀 함수를 나타내며, A_s 와 $A_k^{(a)}$ 는 미지 상수이다. 그리고 $\mathbf{r}^{(I)}$ 는 영역 D_I 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내며, $\mathbf{r}_s^{(I)}$ 와 $\mathbf{r}_k^{(a)}$ 는 경계 Γ_1 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터와 접경 Γ_a 에 위치한 k 번째 노드에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다. 참고로 N_1 과 N_a 는 영역 D_I 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 위에 놓여진 노드의 개수를 각각 나타낸다.

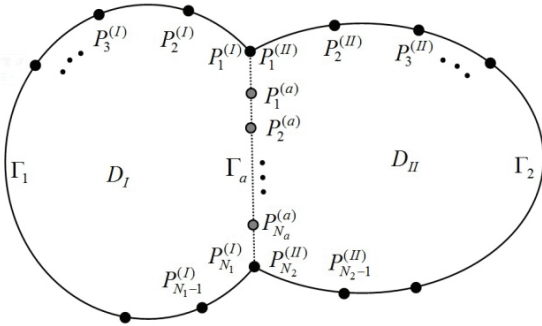


Fig. 1 Concave plate divided with 2 convex domains

가정된 진동 변위 응답 식(4)는 지배방정식 식(1)을 만족하므로, 경계조건 식(2)를 식(4)에 적용하는 방법에 의해 자유 진동 해를 구하고자 한다. 영역 D_I 의 경계 Γ_1 은 변위가 영(zero)인 경계조건 식(2)를 가지고 있으므로, 경계 Γ_1 위에 놓인 노드들은 다음과 같은 변위가 0인 경계 조건을 만족한다.

$$W(\mathbf{r}_i^{(I)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1. \quad (5)$$

진동 변위 응답 식(4)를 경계 조건 식(5)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1} A_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) = 0 \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1.$$

이제 식(6)에서 주파수 파라미터 Λ 를 베셀 함수 J_0 에서 분리해내기 위해, 베셀 함수는 다음과 같이 테일러 급수 전개⁽¹²⁾에 의해 근사화 된다.

$$J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}| / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2} = \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(I)}(i, s) \quad (7)$$

$$J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)}| / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2} = \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(Ia)}(i, k) \quad (8)$$

여기서 $\phi_j^{(I)}(i, s)$ 와 $\phi_j^{(Ia)}(i, k)$ 는 다음과 같다.

$$\phi_j^{(I)}(i, s) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}| / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2} \quad (9)$$

$$\phi_j^{(Ia)}(i, k) = \frac{(-1)^j (|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)}| / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2} \quad (10)$$

식(7)과 식 (8)을 식(6)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1} A_s \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(I)}(i, s) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j^{(Ia)}(i, k) = 0 \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1.$$

식(11)에서 서메이션(summation) 기호의 순서를 바꾸어서 다음과 같이 정리한다.

$$\sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \sum_{s=1}^{N_1} A_s \phi_j^{(I)}(i, s) + \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_j^{(Ia)}(i, k) = 0 \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1.$$

다음으로, 식(12)를 주파수 파라미터 Λ 에 대한 다항식의 형태로 다음과 같이 수정한다.

$$\begin{aligned}
& \lambda^0 \sum_{s=1}^{N_1} A_s \phi_0^{(I)}(i, s) + \lambda^1 \sum_{s=1}^{N_1} A_s \phi_1^{(I)}(i, s) + \\
& \quad \cdots + \lambda^M \sum_{k=1}^{N_1} A_s \phi_M^{(I)}(i, s) \\
& + \lambda^0 \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_0^{(Ia)}(i, k) + \lambda^1 \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_1^{(Ia)}(i, k) + \\
& \quad \cdots + \lambda^M \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \phi_M^{(Ia)}(i, k) = 0 \\
& \quad i = 1, 2, \dots, N_1,
\end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$\lambda = \Lambda^2. \quad (14)$$

마지막으로, 식(13)을 행렬식의 형태로 표현하면, 영역 D_I 에 대한 경계조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
& (\lambda^0 \Phi_0^{(I)} + \lambda^1 \Phi_1^{(I)} + \cdots + \lambda^M \Phi_M^{(I)}) \mathbf{A} \\
& + (\lambda^0 \Phi_0^{(Ia)} + \lambda^1 \Phi_1^{(Ia)} + \cdots + \lambda^M \Phi_M^{(Ia)}) \mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{0}
\end{aligned} \quad (15)$$

여기서, 크기 $N_1 \times N_1$ 인 행렬 $\Phi_j^{(I)}$ 의 i 번째 행과 s 번째 열에 위치한 성분은 식(16)에 의해 주어지며, 크기 $N_1 \times N_a$ 인 행렬 $\Phi_j^{(Ia)}$ 의 i 번째 행과 k 번째 열에 위치한 성분은 식(17)에 의해 주어진다.

$$\Phi_j^{(I)}(i, s) = \phi_j^{(I)}(i, s), \quad (16)$$

$$\Phi_j^{(Ia)}(i, k) = \phi_j^{(Ia)}(i, k), \quad (17)$$

그리고 식(15)에서 벡터 \mathbf{A} 와 $\mathbf{A}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \{A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_{N_1}\}^T, \quad (18)$$

$$\mathbf{A}^{(a)} = \{A_1^{(a)} \quad A_2^{(a)} \quad \cdots \quad A_{N_a}^{(a)}\}^T, \quad (19)$$

여기서 $\{\dots\}^T$ 는 전치 행렬(transpose matrix)을 의미한다.

마찬가지 방법으로, 영역 D_{II} 의 내부 한 점에서의 진동 변위를 경계 Γ_2 과 접경 Γ_a 에 놓인 노드들에 대한 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 식(20)과 같이 가정한다. 참고로, 가정된 진동해 식(20)도 지배방정식 식(1)을 만족한다.

$$\begin{aligned}
W_{II}(\mathbf{r}^{(II)}) &= \sum_{s=1}^{N_2} B_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) \\
& + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|)
\end{aligned} \quad (20)$$

여기서 B_s 와 $B_k^{(a)}$ 는 미지 상수이며, $\mathbf{r}^{(II)}$ 는 영역 D_{II} 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내고 $\mathbf{r}_s^{(II)}$ 는 경계 Γ_2

에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터를 나타낸다. 참고로 N_2 는 영역 D_{II} 의 경계 Γ_2 위에 놓여진 노드의 개수를 나타낸다.

다음으로 경계 Γ_2 에 놓인 노드들의 변위는 0을 만족한다는 경계 조건 식(21)을 식(20)를 대입하면, 식(22)를 얻을 수 있다.

$$W(\mathbf{r}_i^{(II)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_2. \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{N_2} B_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) \\
& + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) = 0 \\
& \quad i = 1, 2, \dots, N_2.
\end{aligned} \quad (22)$$

이제 식(22)에 있는 베셀 함수들을 식(7)과 식(8)과 같이 테일러 급수 전개하고, 영역 D_I 에 대해 수행한 식(11~15)의 과정을 식(22)에 적용하면, 영역 D_{II} 에 대한 경계조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
& (\lambda^0 \Phi_0^{(II)} + \lambda^1 \Phi_1^{(II)} + \cdots + \lambda^M \Phi_M^{(II)}) \mathbf{B} \\
& + (\lambda^0 \Phi_0^{(IIa)} + \lambda^1 \Phi_1^{(IIa)} + \cdots + \lambda^M \Phi_M^{(IIa)}) \mathbf{B}^{(a)} = \mathbf{0}
\end{aligned} \quad (23)$$

여기서 행렬 $\Phi_j^{(II)}$ 와 $\Phi_j^{(IIa)}$ 의 크기는 각각 $N_2 \times N_2$ 와 $N_2 \times N_a$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식(24)과 식(25)에 의해 각각 주어지며,

$$\Phi_j^{(II)}(i, s) = \phi_j^{(II)}(i, s), \quad (24)$$

$$\Phi_j^{(IIa)}(i, k) = \phi_j^{(IIa)}(i, k), \quad (25)$$

벡터 \mathbf{B} 와 $\mathbf{B}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \{B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_{N_2}\}^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{B}^{(a)} = \{B_1^{(a)} \quad B_2^{(a)} \quad \cdots \quad B_{N_a}^{(a)}\}^T. \quad (27)$$

2.3 접경에서의 연속 조건 적용

영역 D_I 와 D_{II} 의 접경 Γ_a 에서 진동 변위와 변위의 기울기가 같다는 연속 조건⁽¹³⁾을 고려한다. 접경 Γ_a 에 위치한 노드들에서의 변위 연속 조건은 식(28)과 같이 표현될 수 있으며, 변위의 기울기 연속 조건은 식(29)와 같이 표현될 수 있다.

$$W_I(\mathbf{r}_i^{(a)}) = W_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)}), \quad i = 1, 2, \dots, N_a, \quad (28)$$

$$\frac{\partial W_I(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i} = \frac{\partial W_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_a, \quad (29)$$

여기서 n_i 는 접경 위에 놓인 i 번째 노드의 법선 방향을 의미한다.

이제 두 영역에서의 변위 식(4)와 식(6)을 변위 연속 조건 식(28)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{N_1} A_s J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|) \\ & + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \\ & = \sum_{s=1}^{N_2} B_s J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right|) \\ & + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N_a. \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)에 있는 베셀 함수들을 테일러 급수 전개하고, 앞의 식(11~15)의 과정을 수행하면, 변위 연속 조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\lambda^0 \Phi_0^{(aI)} + \lambda^1 \Phi_1^{(aI)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(aI)}) \mathbf{A} \\ & + (\lambda^0 \Phi_0^{(a)} + \lambda^1 \Phi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(a)}) \mathbf{A}^{(a)} \\ & = (\lambda^0 \Phi_0^{(aII)} + \lambda^1 \Phi_1^{(aII)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(aII)}) \mathbf{B} \\ & + (\lambda^0 \Phi_0^{(a)} + \lambda^1 \Phi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Phi_M^{(a)}) \mathbf{B}^{(a)} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 행렬 $\Phi_j^{(aI)}$, $\Phi_j^{(a)}$, $\Phi_j^{(aII)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1$, $N_a \times N_a$, $N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식(32~34)에 의해 각각 주어진다.

$$\Phi_j^{(aI)}(i, s) = \phi_j^{(aI)}(i, s), \quad (32)$$

$$\Phi_j^{(a)}(i, k) = \phi_j^{(a)}(i, k), \quad (33)$$

$$\Phi_j^{(aII)}(i, s) = \phi_j^{(aII)}(i, s). \quad (34)$$

다음으로 식(4)와 식(6)을 기울기 연속 조건 식(29)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{N_1} A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|) \\ & + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \\ & = \sum_{s=1}^{N_2} B_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right|) \\ & + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N_a. \end{aligned} \quad (35)$$

식(35)에서 법선 n_i 에 대한 미분을 수행하면 나타나는 베셀 함수 J_1 을 테일러 급수 전개 하고, 앞의 식(11~15)의 과정을 수행하면, 기울기 연속 조건이 고려된 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\lambda^0 \Psi_0^{(aI)} + \lambda^1 \Psi_1^{(aI)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(aI)}) \mathbf{A} \\ & + (\lambda^0 \Psi_0^{(a)} + \lambda^1 \Psi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(a)}) \mathbf{A}^{(a)} \\ & = (\lambda^0 \Psi_0^{(aII)} + \lambda^1 \Psi_1^{(aII)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(aII)}) \mathbf{B} \\ & + (\lambda^0 \Psi_0^{(a)} + \lambda^1 \Psi_1^{(a)} + \dots + \lambda^M \Psi_M^{(a)}) \mathbf{B}^{(a)} \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 $\Psi_j^{(aI)}$, $\Psi_j^{(a)}$, $\Psi_j^{(aII)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1$, $N_a \times N_a$, $N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식(37~39)에 의해 각각 주어진다.

$$\Psi_j^{(aI)}(i, s) = \frac{(-1)^j \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right| / 2 \right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|}{\partial n_i}, \quad (37)$$

$$\Psi_j^{(a)}(i, k) = \frac{(-1)^j \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right| / 2 \right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|}{\partial n_i}, \quad (38)$$

$$\Psi_j^{(aII)}(i, s) = \frac{(-1)^j \left(\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right| / 2 \right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)} \frac{\partial \left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right|}{\partial n_i}. \quad (39)$$

2.4 시스템 행렬 추출과 고유치 문제로의 정식화

2.2 절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식(15)와 식(23) 및 2.3 절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식(31)과 식(36)을 모두 연립하여 하나의 행렬식으로 나타내면, 다음과 같은 고차 다항 고유치 문제 행렬식⁽⁴⁴⁾을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \lambda^0 \begin{bmatrix} \Phi_0^{(I)} & \Phi_0^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_0^{(II)} & \Phi_0^{(IIa)} \\ \Phi_0^{(aI)} & \Phi_0^{(a)} & -\Phi_0^{(aII)} & -\Phi_0^{(a)} \\ \Psi_0^{(aI)} & \Psi_0^{(a)} & -\Psi_0^{(aII)} & -\Psi_0^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(I)} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B}^{(II)} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{bmatrix} \\ & + \lambda^1 \begin{bmatrix} \Phi_1^{(I)} & \Phi_1^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_1^{(II)} & \Phi_1^{(IIa)} \\ \Phi_1^{(aI)} & \Phi_1^{(a)} & -\Phi_1^{(aII)} & -\Phi_1^{(a)} \\ \Psi_1^{(aI)} & \Psi_1^{(a)} & -\Psi_1^{(aII)} & -\Psi_1^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(I)} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B}^{(II)} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{bmatrix} \\ & + \dots \\ & + \lambda^M \begin{bmatrix} \Phi_M^{(I)} & \Phi_M^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_M^{(II)} & \Phi_M^{(IIa)} \\ \Phi_M^{(aI)} & \Phi_M^{(a)} & -\Phi_M^{(aII)} & -\Phi_M^{(a)} \\ \Psi_M^{(aI)} & \Psi_M^{(a)} & -\Psi_M^{(aII)} & -\Psi_M^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(I)} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B}^{(II)} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

다음으로 위 식을 다음과 같이 간단한 형태로 표현한다.

$$\lambda^0 \mathbf{SM}_1 \mathbf{C} + \lambda^1 \mathbf{SM}_1 \mathbf{C} + \dots + \lambda^M \mathbf{SM}_M \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (41)$$

여기서

$$\mathbf{SM}_j = \begin{bmatrix} \Phi_j^{(I)} & \Phi_j^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_j^{(II)} & \Phi_j^{(IIa)} \\ \Phi_j^{(aI)} & \Phi_j^{(a)} & -\Phi_j^{(aII)} & -\Phi_j^{(a)} \\ \Psi_j^{(aI)} & \Psi_j^{(a)} & -\Psi_j^{(aII)} & -\Psi_j^{(a)} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{(a)} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{(a)} \end{Bmatrix}. \quad (43)$$

주파수 파라미터 λ 에 대한 고차 다항 행렬식 식(41)은 다음과 같이 선형화될 수 있다.⁽¹⁴⁾

$$\mathbf{SM}_L \mathbf{D} = \lambda \mathbf{SM}_R \mathbf{D}, \quad (44)$$

여기서 시스템 행렬 \mathbf{SM}_L 과 \mathbf{SM}_R 그리고 미지 벡터 \mathbf{D} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} \\ -\mathbf{SM}_0 & -\mathbf{SM}_1 & -\mathbf{SM}_2 & \cdots & -\mathbf{SM}_{M-1} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$\mathbf{SM}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_M \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{C}^T, \lambda \mathbf{C}^T, \lambda^2 \mathbf{C}^T, \dots, \lambda^{M-1} \mathbf{C}^T \right\}. \quad (47)$$

마지막으로 식(44)는 다음과 같이 변경된다.

$$\mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L \mathbf{D} = \lambda \mathbf{D} \quad (48)$$

식(48)을 다시 작성하면, 다음과 같이 대수 고유치 문제로 정식화된 최종 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM} \mathbf{D} = \lambda \mathbf{D}, \quad (49)$$

여기서

$$\mathbf{SM} = \mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L. \quad (50)$$

식(49)로부터 구한 고유치를 식(14)에 대입하여 Λ 를 계산하고, 이 계산 값을 식(4)에 대입하는 방법에 의해 해석 대상 평판의 고유진동수를 구할 수 있다. 참고로, 식(49)에 있는 최종 시스템 행렬 \mathbf{SM} 은 기존의 NDIF 법과는 달리 주파수 파라미터에 무관함을 수치하라.

3. 검증 예제

본 논문에서 제안된 방법의 타당성 및 정확성을 검증하기 위해, 엄밀해가 존재하는 직사각형 평판(가로 1.2m, 세로 0.9m)을 Fig. 2 와 같이 두 영역으로 분할한 후, 두 영역의 경계 및 접경에 총 29 개의 노드($N_1 = N_2 = 13, N_a = 3$)를

배치하여 해석을 수행하였다. 그 결과는 Table 1 에 제시되었다. 참고로 두께(h)가 0.005m, 영률(E)이 210GPa, 프와송비(ν)가 0.3, 밀도(ρ_s / h)가 7800kg/m³ 인 물성치를 가진 평판이 본 예제에서 사용되었다.

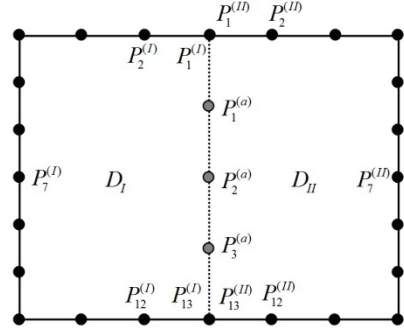


Fig. 2 Rectangular plate divided with 2 domains

Table 1 Natural frequencies (Hz) of the rectangular plate by the proposed method, the exact solution, and FEM (parenthesized values denote errors (%) with respect to the values by the exact solution).

	proposed method (29 nodes, $M = 15$)	exact solution ⁽¹¹⁾	FEM(ANSYS) (1238 nodes)
1	23.79 (0.00)	23.79	23.81 (0.08)
2	49.48 (0.00)	49.48	49.60 (0.24)
3	69.46 (0.00)	69.46	69.67 (0.30)
4	92.30 (0.00)	92.30	92.87 (0.62)
5	95.15 (0.01)	95.16	95.46 (0.31)
6	137.9 (0.07)	138.0	138.7 (0.51)
7	146.1 (0.34)	145.6	146.6 (0.69)

Table 1에서, 본 논문에서 제안된 방법(proposed method)와 엄밀해(exact solution)을 비교해보면, 4차 고유진동수까지는 오차가 없음을 알 수 있으며, 5차부터 미소한 오차가 발생함을 확인할 수 있다. 이러한 오차는 본 해석에서 사용된 테일러 급수의 개수 15개 ($M = 15$)를 좀 더 늘이면 줄어들 것으로 예상된다. 테일러 급수의 개수를 20개로 늘여서 해석한 결과, 오차가 많이 줄어들음을 확인할 수 있었다. 참고로 본 논문에서는 지면 관계상 관련 해석 결과는 생략한다. 결과적으로 제안된 방법은 엄밀해와 일치하거나 오차가 거의 없는 매우 정밀한 해를 제공함을 Table 1에서 확인할 수 있다.

반면에 Table 1에서 엄밀해와 FEM 해석 결과를 비교해보면, FEM에서 1238개의 많은 노드를 사용하였으나, 제안된 방법에 비해 상대적으로 엄밀해와 큰 오차를 가짐을 확인할

수 있다.

4. 결 론

오목 형상의 평판에 대해 정밀한 해를 제공하지 못하는 MNDIF법을 문제점을 극복할 수 있는 분할 영역법을 이용한 새로운 MNDIF법 정식이 본 논문에서 제안되었다. 제안된 정식은 예제 검증을 통해 그 타당성과 정확성이 확인되었다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(2012R1A1A2044327).

참 고 문 헌

1. Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.
2. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New York.
3. Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, "Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function," Journal of Sound and Vibration. Vol. 221, pp. 117~132.
4. Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function," Journal of Sound and Vibration. Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.
5. Kang, S. W. and Lee J. M., 2001, "Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-type functions," Journal of Sound and Vibration. Journal of Sound and Vibration. Vol. 242. No, 1, pp. 9~26.
6. Kang, S. W., 2002, "Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with a mixed boundary condition using non-dimensional dynamic influence functions," Journal of Sound and Vibration. Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.
7. Kang, S. W., 2007, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Free Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners," Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.
8. Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2008, "Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with smoothly varying free edges using NDIF method," Journal of Vibration and Acoustics, Transaction of ASME. Vol. 130, No. 4, pp. 041010.1~041010.8.
9. Kang, S. W. and Yoon, J. I., 2012, "Development of the NDIF Method Using a Sub-domain method Approach for Extracting Highly Accurate Natural Frequencies of Arbitrarily Shaped Plates ," Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 22, No. 9, pp. 830~836.
10. Kang, S. W. and Kim, J. G, 2009, "A Formulation of NDIF Method to the algebraic Eigenvalue Problem for Efficiently Extracting Natural Frequencies of Arbitrarily Shaped Plates with the Simply Supported Boundary Condition," Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 19, No. 6, pp. 607~613.
11. Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Litton Educational Publishing, New York.
12. Spiegel, M. R., 1983, Advanced Mathematics, McGraw-Hill, Inc, Singapore.
13. Meirovitch, L., 1967, Analytical methods in vibrations, Macmillan Publishing, New York.
14. Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., 1982, Matrix Polynomials, Academic Press, New York.