

# 반무한 Mindlin 판의 파동전달해석

## Wave transmission analysis of semi-infinite Mindlin plate

박영호†  
Young-Ho Park

### 1. 서 론

고주파수 대역에서는 동적 시스템(dynamic system)의 물리적 파라미터(physical parameters)의 주파수 민감도가 높아지고 모드간격이 좁기 때문에, 기존 저주파수 대역에서 높은 신뢰성을 갖고 적용되었던 변위해에 기반한 전통적인 유한요소법(FEM)이나 경계요소법(BEM)과 같은 결정론적 방법(deterministic approach)은 비용적 측면에서 보나 예측 결과의 타당성 측면에서나 해석 기법으로 적절하지 않다. 이런 이유로 에너지에 기반한 통계적 방법(statistical approach)은 고주파수 대역에서 합리적인 대안으로 받아들여 지고 있다. 통계적 방법 중에 대표적인 방법으로 통계적에너지해석법(SEA)은 모드밀도가 높은 동적 시스템의 진동소음 에너지 레벨을 예측할 수 있는 기법으로 선형 연립방정식 형태의 파워평형식(power balance equation)을 기반으로 하여 매우 간단하게 분산장의 에너지 분포를 예측할 수 있다<sup>(1)</sup>. 또한 열전도 방정식(heat conduction equation) 형태의 에너지지배방정식에 기반한 에너지흐름해석법(EFA)은 통계적에너지해석법과 같이 저댐핑(light damping)의 분산장 에너지밀도의 공간 분포를 예측할 수 있으며, 편미분 방정식 형태의 지배방정식을 갖고 있어, 국부적인 제진 처리 및 유한요소법과 같은 수치 기법의 적용에 용이한 보다 진보된 방법이다<sup>(2)</sup>.

앞에서 설명한 것과 같이 모드밀도가 높은 고주파수 대역에서 합리적인 소음진동 예측기법이 통계적 기법임에도 불구하고 기존 통계적에너지해석법이나 에너지흐름해석법은 복합 연성 구조물의 소음진동 해석을 수행할 경우, 고주파수 대역에서 무시할 수 없는 전단변형 효과(shear distortion effect)와 회전관성 효과(rotatory inertia effect)를 반영하지 못하고 있다.

박영호와 홍석운은<sup>(3,4,5)</sup> Timoshenko 보와 Mindlin 판의 에너지흐름모델을 개발했고 Timoshenko 연성 구조물의 에너지흐름해석을 위해 파동전달해석을 수행하였다. 그들은 고주파수 대역에서 구조물의 진동 레벨 예측 시 전단변형 효과와 회전관성효과의 중요성을 보여줬다.

본 논문에서는 연성된 Mindlin 판의 통계적에너지 해석이나 에너지흐름해석을 수행하기 위해서 우선적으로 요청되는 파동전달해석(wave transmission analysis)을 수행하였다..

### 2. Mindlin 판 이론

#### 2.1 Mindlin 판의 면외 운동방정식

Mindlin 판의 면외 운동방정식은 Hamilton의 변분 원리(variational principle)를 이용하여 얻어질 수 있다. 변분원리에 사용되는 라그랑지안(Lagrangian)은 위치 에너지에서 운동에너지의 차로 정의되며 Mindlin 판의 면외 운동의 운동에너지와 위치에너지는 식 (1,2)로 각각 나타낼 수 있다.

$$KE = \frac{1}{2} \iint_R \left[ \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left\{ \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_y}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] dA \quad (1)$$

$$PE = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right] + GI \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right) + \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right)^2 + \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \right)^2 \right\} dA \quad (2)$$

여기서  $w$ 은 횡방향 변위를 나타내며,  $\alpha_x$ 와  $\alpha_y$ 는 굽힘에 의한 각 축방향의 회전각,  $h$ 는 판의 두께,  $I = h^3/12$ 는 단위 폭 당 관성모멘트,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 은 굽힘 강성률,  $\nu$ 는 포아송비,

† 교신저자; 박영호, 창원대학교 조선해양공학과  
E-mail : parkyh@changwon.ac.kr  
Tel : 055-213-3684, Fax : 055-213-3689

$E$  는 탄성계수,  $\kappa = 20(1+\nu)/(24+25\nu+\nu^2)$  는 전단보정계수,  $G = E/[2(1+\nu)]$  은 전단계수를 나타낸다.

$$\begin{aligned} D \left[ \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial x \partial y} \right] + \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right) - I \rho \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2} &= 0, \\ D \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x \partial y} \right] + \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \right) - I \rho \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial t^2} &= 0, \\ -\kappa Gh \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3\sim 5)$$

## 2.2 Mindlin 판의 면외 운동

Mindlin 판의 면외 운동방정식의 해를 유도하기 위해서 다음과 같이 변위 포텐셜 함수(displacement potential function)를 정의하여 각 축방향의 회전각을 표현할 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$\alpha_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \alpha_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4,5)$$

여기서  $\phi$  와  $\psi$  은 각각 변위 포텐셜을 나타낸다. 이와 같은 변위 포텐셜을 이용하여 운동방정식(3~5)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \phi + \kappa Gh(w - \phi) - I \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0, \\ D \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 \psi \right] - \kappa Gh(\psi) - I \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \quad (6\sim 8) \\ -\kappa Gh(\nabla^2 w - \nabla^2 \phi) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

또한 식(4,5)를 이용하면 다음과 같은 변위 포텐셜의 라플라시안(Laplacian)을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \quad (9,10)$$

여기서  $\gamma_{xz} = \partial w / \partial x - \alpha_x$  와  $\gamma_{yz} = \partial w / \partial y - \alpha_y$  은 전단 변형률(shear strain)이다.

식(9), (10)을 보면 변위 포텐셜  $\phi$  는 전단 변형과 회전 관성을 포함하고 있고,  $\psi$  는 전단 효과만 반영되어 있음을 알 수 있다. 따라서 식(7)은 조화운동(time-harmonic motion)에 대해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\nabla^2 \psi + \left( \frac{\rho I \omega^2 - \kappa Gh}{GI} \right) \psi = 0. \quad (11)$$

식(11)의 일반해(general solution)는  $\omega > \omega_{c1}$  일 경우 다음과 같은 원거리 영역 파동해(far-field wave solution)가 얻어진다.

$$\psi(x, y, t) = (\bar{A}e^{-jk_{1x}x} + \bar{B}e^{jk_{1x}x}) (\bar{C}e^{-jk_{1y}y} + \bar{D}e^{jk_{1y}y}) e^{j\omega t} \quad (12)$$

여기서  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  는 상수이고  $\omega_{c1} = \sqrt{\kappa Gh / \rho I}$  는 파수(wavenumber)  $k_1 = \sqrt{(\rho I \omega^2 - \kappa Gh) / GI}$  을 갖고 있는 변위 포텐셜  $\psi$  의 임계주파수(critical frequency)이며,  $k_{1x}, k_{1y}$  는 각각 파수  $k_1$  의  $x, y$  방향 성분이다. 식(6), (8)의 조화운동에 대한 일반해를 구하기 위해 식(13)과 같은 해 형태를 가정할 수 있고 식(14)와 같은 파수에 대한 특성방정식(characteristic equation)이 얻어진다.

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ w \end{Bmatrix} = C \bar{d} \exp(K_x x + K_y y) e^{j\omega t}, \quad (13)$$

$$K^4 + \rho \omega^2 \left( \frac{1}{\kappa G} + \frac{I}{D} \right) K^2 + \rho \omega^2 \left( \frac{\rho I \omega^2}{\kappa G D} - \frac{h}{D} \right) = 0. \quad (14)$$

여기서  $C$  는 상수이고  $\bar{d}$  는 상수 벡터,  $K$  는 파수이다.

식(14)의 근은 식(12)의 임계주파수와 동일한 값( $\omega_c = \sqrt{\kappa Gh / \rho I}$ )을 기준으로  $\omega > \omega_c$  일 경우 두 종류의 허근이,  $\omega < \omega_c$  에서는 한 종류의 허근이 얻어진다.

따라서 Mindlin 판의 면외 운동에서,  $\omega > \omega_c$  에서는 총 세 종류의 원거리 영역 파동해(wave solution)가 얻어지고,  $\omega < \omega_c$  에서는 단 한 종류의 원거리 영역 파동해가 얻어진다.  $\omega > \omega_c$  에서 변위 포텐셜  $\phi$  와 횡방향 변위  $w$  의 파동해는 다음과 같이 원거리 영역 성분으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \phi \\ w \end{Bmatrix} &= \left[ \begin{Bmatrix} \rho h \omega^2 - \kappa Gh k_2^2 \\ -\kappa Gh k_2^2 \end{Bmatrix} \left( \bar{A} e^{-jk_{2x}x - jk_{2y}y} \right) + \bar{B} e^{-jk_{2x}x + jk_{2y}y} \right. \\ &\quad \left. + \bar{C} e^{jk_{2x}x - jk_{2y}y} + \bar{D} e^{jk_{2x}x + jk_{2y}y} \right) \\ &\quad + \left[ \begin{Bmatrix} \rho h \omega^2 - \kappa Gh k_3^2 \\ -\kappa Gh k_3^2 \end{Bmatrix} \left( \bar{E} e^{-jk_{3x}x - jk_{3y}y} \right) + \bar{F} e^{-jk_{3x}x + jk_{3y}y} \right. \\ &\quad \left. + \bar{G} e^{jk_{3x}x - jk_{3y}y} + \bar{H} e^{jk_{3x}x + jk_{3y}y} \right) \right] e^{j\omega t}. \quad (15) \end{aligned}$$

여기서 각 파수는

$$\begin{aligned} k_2 &= \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{1}{\kappa G} + \frac{I}{D} \right) + \sqrt{\frac{\rho^2 \omega^4}{4} \left( \frac{1}{\kappa G} - \frac{I}{D} \right)^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D}}} \\ k_3 &= \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{1}{\kappa G} + \frac{I}{D} \right) - \sqrt{\frac{\rho^2 \omega^4}{4} \left( \frac{1}{\kappa G} - \frac{I}{D} \right)^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D}}} \end{aligned} \quad (16,17)$$

이다.

박영호와 홍석윤<sup>(5)</sup>은 가진주파수에 관계없이 항상 원거리 영역 파동해인 파수  $k_2$  를 가진 파동을 굽힘 우세형파(BDFW: Bending Dominant Flexural Wave)로, 순수하게 전단의 영향이 반영된 파동해인 파수  $k_1$  을 가진 파동을 면외전단파(OPSW: Out-of-Plane Shear Wave), 임계주파수 위에서 전단의 영향이 지배적인 파동해인 파수  $k_3$  를 가진 파동을 전단우세형파(SDFW: Shear Dominant Flexural Wave)로 각각 분류 명명하였다.

수행하였다. 본 연구를 통해 기존 반무한 Kirchoff 판의 파동전달해석 결과와 Mindlin 판의 파동전달 해석 결과가 성공적으로 비교되었으며, 고주파수 대역에서 연성 판 구조물의 보다 진보된 에너지흐름 해석법을 위한 기초 연구가 확립되었다.

### 3. 동일 평면상의 Mindlin 판의 파동전달해석

#### 3.1 Mindlin 판의 면외 운동의 진동 파워

Mindlin 판의 면외 진동에서  $x$  방향의 시간평균된 파워는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\langle q_x \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ -D \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial t} \right)^* - (1-\nu) \frac{D}{2} \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \alpha_y}{\partial t} \right)^* - \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^* \right] \quad (18)$$

여기서 \*는 켈레복소수를 의미한다.

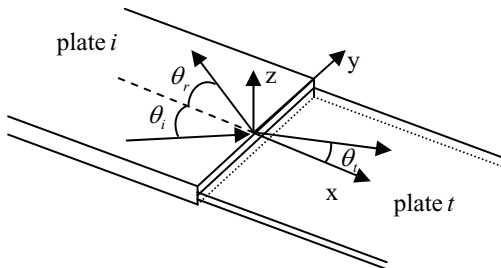


Figure 1. 동일 평면에서 연성된 반무한 Mindlin 판

먼저 그림1의 평판  $i$  에서, 임계주파수보다 높은 주파수 영역일 경우  $\bar{A}$  의 크기를 가진 원거리 면외전단파(far-field OPSW)가 두 판의 경계로 입사할 때 평판  $i$  에 존재하는 면외전단파는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi_i(x, y) = \bar{A} e^{-jk_{1x}x - jk_{1y}y} + B e^{jk_{1x}x - jk_{1y}y} \quad (19)$$

### 3. 결 론

반무한 Mindlin 판의 파동전달해석을 성공적으로