

미세공정변동에서 관리도의
경제적 설계를 위한 조사연구
A Survey on The Economic Design of
Control Chart in Small Process Variation

김 종 결* · 엄 상 준** · 김 형 만***
Jong-Gurl Kim* · Sang-Joon Um** · Hyung-Man Kim***

Abstract

이 논문은 미세공정변동에서 극소불량을 감지하는 관리도의 경제적 설계를 개발하기 위한 조사연구이다. 일반적인 관리도의 설계는 통계적 설계와 경제적 설계로 구분할 수 있다. 공정의 변동 원인에 따라 샘플의 간격(h), 샘플의 크기(n), 관리한계선(k) 등의 설계 모수를 최적접근방법으로 결정을 하는 경제적 설계의 모델을 조사하였다.

관리도의 경제적 설계는 공정의 관리이상상태를 효율적으로 감지하여 관리상태로 정상화 시키는 것에 대한 공정의 개선비용과 기대품질비용을 절약 할 수 있는 최적설계 방안이다. 그리고 Shewhart 관리도의 X-bar 통계량으로 극소불량을 검출 하는 것에 한계가 있기 때문에 Z_p 통계량과 분포를 설계하여 극소불량을 빠르게 감지할 수 있는 Z_p 관리도의 설계를 적용하고, 미세공정변동을 정확하게 감지할 수 있는 CUSUM 관리도를 동시에 적용하였다.

따라서, 미세공정변동과 극소불량을 동시에 관리 할 수 있는 Z_p -CUSUM 관리도의 통계적 설계 구조를 체계화 하였으며, 기존의 경제적 설계의 모델을 비교 분석하여 새로운 경제적 설계에 대한 모델을 제안하고자 한다.

Keywords : Z_p -CUSUM Control Charts, Economic Design, Control Chart for Fraction of Nonconforming

* 성균관대학교 시스템경영공학과 교수

** 성균관대학교 산업공학박사

*** 성균관대학교 산업공학과 박사과정

1. 서 론

최근 제조 산업분야에서는 제품개발에 대한 부품소재의 원천기술에서 품질적 경쟁력을 상실하고 있어, 세계화 시장의 확보를 위한 부품의 고급화를 위해서는 품질향상을 통한 제품경쟁력 강화가 중요한 과제로 떠오르고 있다. 현재 제조기업의 자동화된 대량생산시스템에서는 공정의 이상상태를 신속하게 검출하고, 아주 작은 변동을 감지하며, 작은 불량률을 동시에 관리해서 관리상태로 정상화 할 수 있는 강건한 새로운 관리도가 필요하다.

또한, 공정현장에서는 공정산포가 작은 제조공정에서 품질특성치의 ppm단위의 극소(極少)공정불량률 관리를 동시에 관리하고자 하는 신개발 관리도의 설계모수를 기반으로 경제적 설계 모델이 필요하다.

따라서, 미세공정변동을 갖는 공정에서 극소공정불량률의 미세변화를 관리하고자 할 때 Z_p 관리도가 극소(極少)불량률의 미세변화를 감지하지 못하거나 이를 위해 샘플크기가 증가되는 비효율성을 개선하기 위하여 Z_p CUSUM 관리도를 활용하고자 한다.

Z_p CUSUM 관리도는 현장에서의 사용과 해석이 비교적 용이한 Tabular 누적합 방식이 요구되어진다[12].

본 논문은 관리도의 경제적 설계의 연구동향을 살펴보고, 공정현장에서 중요시되는 미세공정변동과 극소불량률을 동시에 관리할 수 있는 Z_p CUSUM 관리도의 설계구조와 절차를 알아본다. 또한 경제적 설계의 기존모델들을 분석하여 적용할 수 있는 접근방법을 Z_p CUSUM 관리도에 활용하여 비용을 최소화 하는 최적알고리즘 접근방법을 제안하고자 한다.

2. 관리도의 경제적 설계 연구동향

Girchick and Rubin[14]는 품질관리모형에 단위 시간당 기대비용을 고려하여 처음으로 관리도의 경제적 설계 모델을 연구하였다.

Duncan(1956)[8]은 Shewhart형태의 \bar{X} 관리도 설계의 최적화에 대한 경제적인 설계를 통해 더 진보된 경제적 설계 모델을 최초로 연구하였다. 이는 \bar{X} 관리도에서 이상요인(Assignable cause)을 경제적으로 발견하기 위해서 첫째, 얼마나 큰 샘플을 취할 것인가? 둘째, 어떻게 샘플 간격을 선택할 것인가? 셋째, 몇 배수의 σ 를 사용하여 관리선을 결정할 것인가? 에 대한 접근방법으로 경제적 설계를 연구하였다.

Goel, Wu(1968)[15]은 Duncan(1956)[8]의 연구를 기반으로 \bar{X} 관리도에서 샘플 사이즈, 관리선을 결정하기 위한 요인, 샘플링 간격을 고려해 손실 비용을 계산하는 것으로 경제적 설계를 도모하였다. 또한 Goel, Wu(1973)[16]은 이 연구의 확장으로 누적합 관리도에서의 경제적 설계도 연구하였는데 Pattern-Search 기술을 사용해서 최적의 샘플 사이즈, 샘플링 간격, 관리선을 결정하는 절차를 연구하였다. 또한 매개변수 설계에

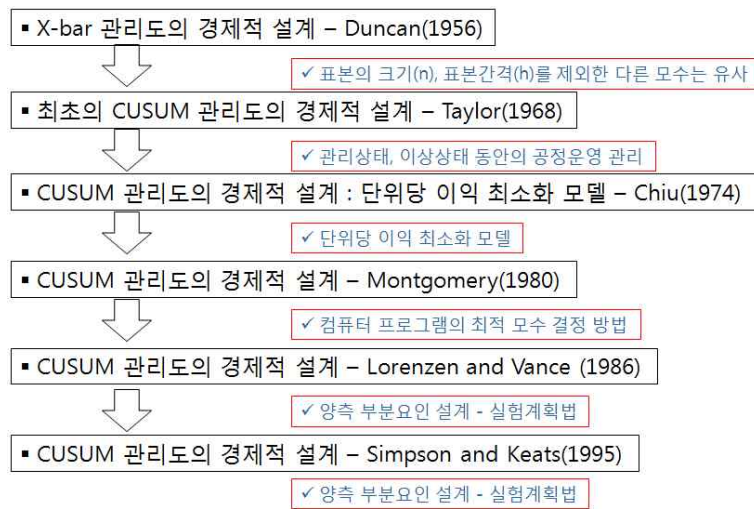
따른 비용과 공정과 관련되어진 리스크요인을 함께 고려하였다.

Taylor(1968)[22]는 누적합 관리도를 사용하는 공정이 비 관리상태일 때 공정수리비용, 작동비용, 유지비용을 고려한 경제적 설계를 연구하였다. Taylor(1968)[22]의 연구에 이어 Duncan(1971)[36]은 기존의 연구를 확장하여 \bar{X} 관리도를 기반으로 하는 공정에서 이상요인이 여러 개일 경우 경제적 설계를 연구하였다. Chiu(1973)는 Duncan(1956,1971)의 논문에서 몇 가지 수정을 통해서 좀 더 효과적으로 최적 관리 매개변수를 결정하는 연구를 하고 비교를 통해 타당성을 제시하였다[32]. 앞서 소개한 Taylor(1968), Duncan(1956,1971), Chiu(1973)의 경제적 설계를 기반으로 Chiu(1974)는 공정에서 누적합 관리도를 사용할 때 경제적 설계 방안을 연구하였다[22][8][7][23].

Saniga[18]는 공정의 평균만이 변할 때와 표준편차만 변했을 때를 각각 구분하여 단위 생산당 기대비용을 최소화하는 표본의 크기, 샘플링 간격, 관리한계를 결정하는 방법을 개발하였다.

Montgomery[9]는 관리도의 경제적 설계방법을 전체적인 관점에서 정리하였으며, 표본의 크기가 30개 미만일 때 비용의 최소화를 컴퓨터 프로그램을 사용하여 최적의 모수들을 보다 쉽게 결정할 수 있는 방법을 개발하였다.

Lorenzen and Vance[21]는 관리도의 경제적 설계에 있어서 모든 관리도에 광범위하게 적용할 수 있는 모델을 개발하였다.



[그림 1] 관리도의 경제적 설계 연구동향

관리도의 경제적 설계에 대해 지금까지도 많은 논문들이 발표되고 있고 대부분의 연구가 처음 이 개념을 제시하였던 Duncan(1956)[8]의 이론을 기반으로 하고 있다. 경제적 모델에서는 샘플링, 부적합에 대한 처리, 수리 등에 대한 비용과 그 외의 공정의 다양성에 따른 다양한 비용들을 고려하고 있다.

3. 미세공정변동에서 극소불량 동시관리 체계

3.1 미세공정변동을 위한 CUSUM 관리도

누적합(CUSUM : Cumulative Sum) 관리도는 현재의 검사 결과뿐만 아니라 앞에서 검사한 결과들을 누적하여 산출한 값으로 공정의 변화를 판단하는 방법이다. 누적합 관리도는 공정의 변화가 서서히 일어나고 있을 때, Shewhart 관리도에 비해 비교적 공정 변화를 민감하게 탐지할 수 있어서 통계적 공정관리(SPC : Statistical Process Control)에서 사용되어지고 있다.

누적합 관리도는 공정에서 시료군의 크기가 n 인 시료를 주기적으로 추출하여 그 평균 값 \bar{x} 와 공정기대값(또는 목표치) μ_0 와의 차이 누적합을 그래프로 그린 것이다. 특히 샘플의 크기 $n=1$ 일 경우에 더 효율적으로 사용될 수 있다. 만일 i 번째 시료군의 평균 값을 \bar{x}_i 라 하면, Tabular 누적합(C_i)은 단측 통계량 상한 값과 하한 값은 다음과 같다.

$$C_i^+ = \text{Max}[0, x_i - (u_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (1)$$

$$C_i^- = \text{Max}[0, (u_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (2)$$

$$C_i^+ = C_i^- = 0, K(\text{reference value}) = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|u_1 - u_0|}{2}$$

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - u_0) \quad (3)$$

누적합 관리도의 사용 공정은 자기상관이 존재하는 공정으로써 작은 이동이 자주 발생하는 공정에서 공정평균의 작은 이동에 민감해 하는 관리도로 사용한다[17]. 또한 Shewhart 관리도는 각 샘플 데이터들의 값을 타점하여 공정을 관리하지만 누적합 관리도는 목표값에서부터 관측값까지의 편차들의 누적합을 이용하여 공정을 관리한다. 이는 관리도에 비하여 작은 이동을 빠르게 감지 할 수 있다는 장점을 가지고 있다.

Montgomery[30]는 통계량은 평균이 “0”을 갖는 랜덤 보행(Random Walk)을 한다고 하였다. C_i 통계량이 랜덤보행을 하기 때문에 누적합 관리도는 통계량의 정규성에 대한 가정이 필요 없으며, 누적합 관리도의 좀 더 정확한 ARL 및 수행도를 계산하고 비교하기 위한 수리적 모델에 관한 연구가 필요하다.

3.2 극소불량률의 Z_p 관리도 설계 구조

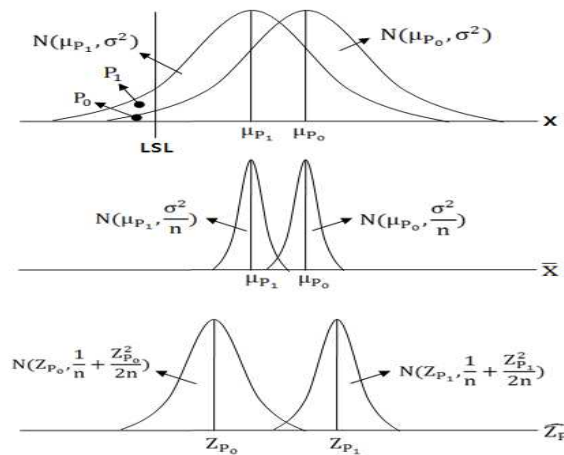
Z_p 관리도는 \hat{Z}_p 를 통해 품질특성의 공정평균 이동에 따른 Z_p 의 변화를 감지하여 공정불량률 P 를 공정에서 관리하는 것이다. 공정불량률 P_0 와 P_1 을 갖는 공정평균 μ_{P_0}

와 μ_{P_1} 일 때의 분포특성과 이에 따른 Z_{P_0} 와 Z_{P_1} 일 때의 분포특성은 하한규격의 경우 [그림 2]와 같다.

다음은 Z_P 관리도는 공정의 불량률이 합격공정수준인지 아니면 불합격공정수준인지에 대한 검정이다[4].

$$H_0 : Z_P = Z_{P_0}, H_1 : Z_P \leq Z_{P_1} \text{ (상한규격 일 때)}$$

$$H_0 : Z_P = Z_{P_0}, H_1 : Z_P \geq Z_{P_1} \text{ (하한규격 일 때)}$$

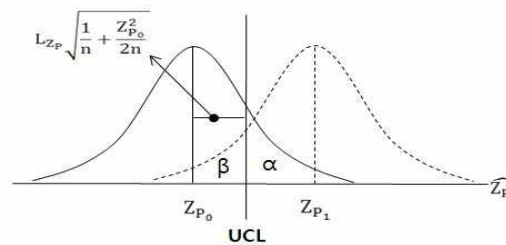


[그림 2]의 분포특성(하한규격일 때)

합격공정불량률 P_0 를 관리하기 위하여 하한규격을 갖는 경우 식 (4)와 같이 UCL을 갖게 되며, 상한규격을 갖는 경우 식 (5)와 같이 LCL을 갖는다[4]. [그림 3]으로 표현된다.

$$UCL = Z_{P_0} + L_{z_p} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{Z_{P_0}^2}{2n}} \quad (4)$$

$$LCL = Z_{P_0} - L_{z_p} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{Z_{P_0}^2}{2n}} \quad (5)$$



[그림 3] Z_P 관리도의 구조(하한규격 일 때)

Z_p 관리도는 공정에서 발생하는 불량률 증가를 파악하는데 용이하며, 특히 원하는 공정불량률 이내에서 공정을 관리하고 싶을 때 매우 효과적이다. 그러나 Z_p 관리도는 Z_{p_0} 의 3시그마 미만의 작은 Z_{p_0} 이동에 대해서는 감도가 떨어지는 한계가 있다. 작은 Z_p 이동에 따른 극소불량률 발생을 민감하게 감지하기 위해서는 동시에 관리할 수 있는 체계가 요구되어진다.

따라서, 공정에서 발생하는 불량률 증가를 용이하게 감지 할 수 있는 Z_p 관리도와 Z_p 이동에 따른 극소불량률을 민감하게 감지 할 수 있는 누적합 관리도를 혼합하여 동시에 이 모든 상황을 관리 할 수 있는 Z_p CUSUM 관리도가 사용되어진다.

3.3 Z_p -CUSUM 관리도 설계

Z_p CUSUM 관리도는 하한규격인 경우 $H_0 : Z_p = Z_{p_0}, H_1 : Z_p = Z_{p_1} (Z_{p_1} > Z_{p_0})$ 을 검정하는 것이므로, $\hat{Z}_p \sim N(Z_{p_0}, \sigma_{Z_{p_0}}^2)$ 에서 $\hat{Z}_p \sim N(Z_{p_0} + \sigma_{Z_{p_0}}^2, \lambda^2 \sigma_{Z_{p_0}}^2)$ 로 공정 평균의 변화와 이에 따르는 분산의 변화를 감지하는 것이다. 단, 하한규격을 갖는 단측 누적합을 따른다. 공정의 평균과 분산의 미세변동감지를 위한 Z_p CUSUM 관리도설계는 Hawkins(1998)[17]에서 소개한 Linear 변환을 이용한 모델을 적용하고자 한다. 표준화된 Z_p CUSUM의 변수 U_n 분포가 Z_{p_1} 으로 이동되면 U_n 의 분포는 식(6)과 같이 된다[14].

$$U_n = \frac{\hat{Z}_{p_n} - Z_{p_1}}{\sigma_{Z_{p_1}}} \sim N(\delta, \lambda^2) \quad (6)$$

Z_p CUSUM 관리도는 공정이 하한규격을 갖는 경우 평균에 대해 상한 누적합이 되며, 이것은 식(7)의 반복을 갖는다.

$$S_n^+ = \text{Max}[0, S_{n-1}^+ + U_n - K^+] \quad (7)$$

Z_{p_1} 으로 이동된 분포에서 얻어진 변수 U_n 는 Linear 변환을 통해 표준정규량 Q_n 로 표현된다.

$$U_n = \lambda Q_n + \delta \quad (8)$$

표준정규량 Q_i 은 식(9)의 반복을 갖는 상한 누적합이 되고,

$$S_n^+ = \text{Max}[0, S_{n-1}^+ + (\lambda Q_n + \delta) - K^+] \quad (9)$$

Q_i 의 상한 누적합은 T_i 으로 다시 표현되어 (10)와 같이 만들어진다.

$$T_0^+ = 0, T_n^+ = \text{Max}[0, T_{n-1}^+ + (Q_n + \frac{\delta - K^+}{\lambda})] \quad (10)$$

T^+ 가 샘플간격(h)을 결정하면 공정은 관리이상상태가 된다. 여기서 단측 상한 누적합관리도는 Z_p 의 상한 공정평균이동을 감지하고 $T_i^+ > h$ 이면 i 번째 표본에서 공정이 관리이상상태로 판단한다. Z_p CUSUM 관리도 설계절차는 Gan(1994)에서 소개된 Crowder(1989)와 Gan(1991)의 방식을 따르고자 한다[4].

첫 번째, 허용 될 수 있는 가장 작은 $ARL_0 (\geq 371)$ 을 정한다. 이는 Lucas, J.M(1982)의 방법을 따르고 있다. 두 번째, 신속하게 감지하고자 하는 불합격 공정불량을 Z_{p1} 을 정하여 δ 를 얻는다. 세 번째, 두 번째 단계에서 정해진 Z_{p1} 에 대해 가장 작은 ARL_1 을 가져오는 k 를 결정하며, 이에 대한 근사값을 얻기 위해 $k^+ = \frac{\delta}{2}$ 을 사용한다. 이러한 방식은 Lucas(1976), Woodall(1986), Yashchin(1987), Montgomery(6th판) 등에서 사용된 바 있다[4]. 네 번째, 세 번째 단계에서 K^+ 정해진 값을 이용하여 첫 번째 단계에서 정한 ARL_0 을 고려한 관리한계값 h^+ 을 정하고, δ 와 λ 를 반영하여 h 와 k 를 구한다. 다섯 번째, 네번째에서 선택된 h 와 ARL_1 을 고려하여 가장 바람직한 결과값을 주는 Z_p CUSUM 관리도를 설계하게 된다[4].

4. 경제적 설계 모델의 고찰

4.1 Duncan의 경제적 설계 모델

경제적 설계의 모수는 Duncan(1956)의 수식모델[8]을 기반으로 관리도의 특징에 따라 수정되어지고 있다. \bar{X} 관리도에서 사용되어지는 설계모수를 기반으로 누적합 관리도의 특성에 맞게 설계모수가 정의되어졌다.

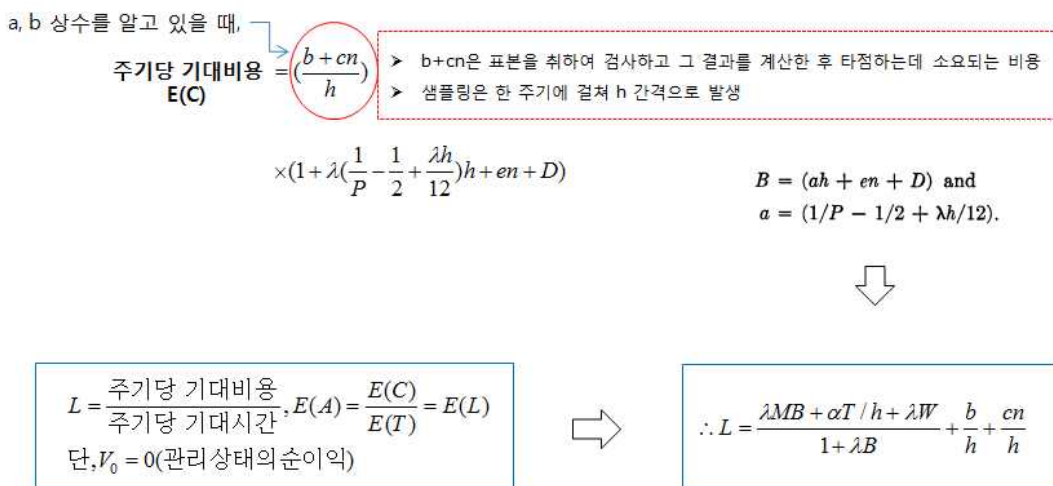
경제적설계의 모수는 기본 설계를 위한 설계모수인 표본의 크기(n), 관리 한계선의 너비(k), 표본 추출 구간(h)으로 구분되어진다. 경제적 비용을 결정하는 기대비용 설계모수는 공정 이상 시 제조되는 시간당 비용(M), 오류신호 발생 시 조사비용(T), 이상원인의 발견비용(W), 고정 표본 비용(b), 가변 표본 비용(c) 등으로 정의되어지고, 기대시간 설계모수는 표본을 추출하고 검사하는 시간(e), 이상원인을 발견하는데 소요되는 시간(D), 이상원인이 발생하는 평균시간($1/\lambda$), 기대되는 이동 크기(δ), 제 1종 오류 (α) = $2 \int_k^\infty \phi(z)dz$, 검정력(P) = $\int_{-\infty}^{-k-\delta\sqrt{n}} \phi(z)dz + \int_{k-\delta\sqrt{n}}^\infty \phi(z)dz$, 오류 신호의 평균시간(ATIS)으로 정리되어진다. 최적화 되어 기대되는 시간당 경제적 손실(L)

비용으로 산출되어진다.

경제적 설계를 공정운영에 관한 가정은 다음과 같다.

- 공정은 관리 상태에서 시작하고, 공정의 이상원인은 공정평균을 $\delta\sigma$ 만큼 변화 시켰다.
- 한가지의 이상원인만 존재하며, 발생 시간은 평균이 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따른다.
- 표본 중에 이상원인은 발생하지 않고, 이상원인을 찾는 동안에도 공정은 계속 가동된다.
- 이상원인은 반드시 검색할 수 있으며, 검색 후 조치하면 공정은 관리상태로 복구된다.

따라서, 경제적 설계를 위한 공정운영에 대한 가정 하에 Duncan의 관리도 설계모수를 도출하여 [그림 4]와 같이 경제적 설계의 최종 모델을 제시하였다.



[그림 4] Duncan의 경제적 모델

4.2 Lorenzen & Vance의 경제적 설계 모델

Lorenzen-Vance 모델[33]은 관리도의 경제적 설계에 있어서 광범위한 모델이라고 할 수 있다. 이 모델은 Duncan 모델에서 \bar{X} 관리도의 계량형에 한정하여 적용한 것 외에 계수형에도 적용하였다.

공정이 관리상태에 있을 때도 비용이 존재한다. 공정에서 샘플을 추출하고, 결함품이 생산되고, 실패 경보가 발생되기 때문이다.

공정 이상상태로 들어서게 되면 이상원인을 알려주고 관리자 개입 없이는 관리상태로 정상화되는 것은 어렵다고 가정한다.

이상상태에서 비용이 발생하는 이유는 샘플을 추출하고, 결함품의 수가 증가하고, 이상상태의 원인을 식별하고, 그것을 수리하며 그 동안 공정이 멈추기 때문이다. 시스템을 수리하게 되면 하나의 품질주기가 완성되며 다른 주기가 시작된다.

이 연구의 목적은 공정의 기본주기에서 예상되는 시간당 비용을 최소화 하는 모델을 개발하는 것이다. 이것은 로즈가 1970년에 했던 보상 공정을 개선한 것이다. 따라

서 시간당 기대비용은(기대비용/시간) 한 주기의 기대비용과 시간당 기대주기시간의 비율로 계산 될 수 있다.

생산주기는 다음과 같이 시간적 의미로 설명한다.[3]

- (1) 이상 원인이 발생할 때까지의 시간
- (2) 다음 샘플이 취해질 때까지의 시간
- (3) 샘플과 관리도를 분석하는 시간
- (4) 관리도가 이상신호를 제공할 때까지의 시간
- (5) 이상원인을 발견하여 공정을 수리하는데 걸리는 시간

- 관리상태에서 취할 수 있는 표본 개수 : s

$$s = e^{-\lambda h / (1 - e^{-\lambda h})}$$

- i 번째와 $i+1$ 번째 표본 사이에 이상원인이 발생하는 기대 시간 : τ

$$\tau = \frac{[1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}]}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}$$

- 이상원인이 일어나고 그 후의 표본의 기대시간 : $h - \tau$

- 표본에 대한 기대시간을 E 라 하면 n 개의 관측치에 대한 기대시간 : nE

- 공정이동의 기대시간, 이상원인 발견, 공정의 수리시간

$$h(ARL2 - 1) + T_1 + T_2$$

기대 생산주기를 결정하는 식

$$1/\lambda + (1 - \delta_1)sT_0/ARL1 - \tau + nE + h(ARL2) + T_1 + T_2$$

- 공정상태(In-Control)하에서 불량품이 생산될 때의 시간당 비용 : c_0

- 공정이상상태하에서 불량품이 생산될 때의 시간당 비용 : c_1

$$c_0/\lambda + c_1(-\tau + nE + h(ARL2) + \delta_1 T_1 + \delta_2 T_2)$$

- 이상원인에 대한 오류신호, 수리, 보수비용

Y 를 오류신호에 대한 비용, W 를 이상원인에 의한 수리, 보수비용

$$sY/ARL_1 + W$$

총제적 관리도의 경제적 설계의 모델은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\begin{aligned} C(n, h, r, L) &= \frac{C_0}{\lambda} + C_1[-\tau + nE + h(ARL_2) + \delta_1 T_1 + \delta_2 T_2] \\ &+ \frac{sY}{ARL_1} + W + \left[\frac{b + cn}{h}\right] \left[\frac{1}{\lambda} - T + nE + h(ARL_2) + \delta_1 T_1 + \delta_2 T_2\right] \\ &/ \left[\frac{1}{\lambda} + (1 - \delta_1)sT_0/ARL_0 - \tau + nE + h(ARL_2) + T_1 + T_2\right] \\ &= \frac{\text{공정 기대주기 비용}}{\text{기대 생산주기}} \end{aligned}$$

5. Zp CUSUM 관리도의 경제적 설계 접근방법

5.1 경제적 설계의 절차

Zp CUSUM 관리도를 대상으로 비용함수를 도출하고, 이를 최적화 하는 과정을 설명한다. Zp CUSUM 관리도의 경제적 설계는 Shewhart \bar{X} 관리도의 설계모수 n, h, k 와 평균런길이 ARL값과 Zp CUSUM 관도의 불량률 Z_p, Z_{p_0}, Z_{p_1} 의 모수값을 추가한다. Duncan[7]의 연구와 유사한 가정을 전제로 Lorenzen-Vance의 모델[21]을 수정한 Zp CUSUM 관리도의 경제적 설계 절차를 제안하고자 한다.

Step1. 모델 결정을 위한 기본가정 정의

- 생산 공정은 관리상태에서 시작한다.
- 이상원인의 발생은 지수분포 과정을 따른다.
- 이상상태의 미세공정평균과 극소불량률 발생을 동시에 관리한다.
- 관리상태와 이상상태의 변화는 반복적으로 발생한다.

Step2. 모델 설계에 필요한 비용 정의

- 고정비용으로 표본추출 및 검정비용을 정의한다.
- 이상원인을 발견하여 개선 도는 수리하는 비용을 정의한다.
- 불량제품에 의한 손실비용을 정의한다.

Step3. 주기당 기대시간함수 설정

- 공정의 기본 가정된 시간을 근거로 주기당 기대시간 함수를 설정한다.

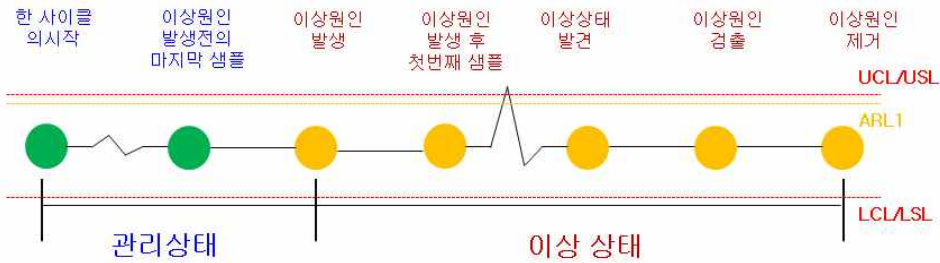
Step4. 주기당 기대비용 함수 설정

- 가정과 정의된 비용을 근거로 주기당 기대비용 함수를 설정한다.

Step5. 공정관리 비용을 최소화하는 최적 설계 모수 값 설정

- 비용 함수를 최소화 하는 최적화 과정을 한다.

Zp CUSUM 관리도의 경제적 비용은 단위시간당 평균비용을 주기당 평균비용의 기대값으로 나누어 계산할 수 있다. 하나의 주기는 공정의 시작에서 이상원인이 발생하면, 미세공정평균변동과 극소불량의 이상상태를 발견되어 동시에 관리되어져서, 다음 이상원인을 검색하고 관리상태로 복구될 때까지로 정의한다. [그림5]은 Zp CUSUM 관리도의 기본 주기를 나타내고 있다.



[그림 5] Z_p -CUSUM 관리도의 기본 주기

5.2 ARL을 적용한 경제적 설계

누적합의 ARL 산출방식은 지금까지 많은 연구가 진행되었다. 그 중에서도 Brook and Evans(1972)[6]는 Markov chain을 이용하여 관리상태에서 관리이상상태로의 근사적인 변환을 통해 ARL을 산출하였고, Hawkins(1992)[17]는 approximating equation을 통해 간단하면서도 매우 정확하게 ARL을 산출하였다[39]. 누적합관리도의 ARL산출을 위해 Woodall and Adams(1993)[25]의 방식을 적용하고자 한다. 이것은 Siegmund(1985)[20]가 제시한 SPRT(Sequential Probability Ratio Test)를 이용한 근사식을 적용하는 것이다. 이와 같이 ARL산출에 근사식을 사용한 것이므로 감지하고자 하는 이동의 크기와 관리도의 모수에 따라서 ARL과 오차가 발생 될 수 있으나, Woodall and Adams(1993)[25]에서 언급된 바와 같이 ARL이 1.5보다 클 때 ARL의 5%이내에서 추정된 값을 얻을 수 있다. 그리고 평균의 매우 큰 이동에 대해서 ARL은 1보다 적은 근사값을 준다. 이 접근방법은 ARL을 고려한 CUSUM 관리도 설계의 간편성을 주며, 이것은 공정현장에서 빈번히 발생하는 극소불량률 변화의 신속한 감지를 보다 효과적으로 대응할 수 있다고 본다[4].

따라서, Z_p 와 n 을 기준으로 특정 불량률을 관리하기 위한 Z_p CUSUM 관리도의 모수 h 와 k 를 공정현장에서 쉽게 설계가 가능하며, Single ppm의 불량발생을 관리할 수 있도록 ARL을 계산할 수 있다[2].

5.3 경제적 설계의 비용 최적화 알고리즘

표본의 크기(n)와 평균런길이(ARL)가 정수임을 착안하여, 이들을 변화시켜 가면서 주어진 n 과 ARL에서 단위 시간당 비용(L)을 최소화하는 관리 한계선(k)과 표본추출 간격(h)을 구하는 반복적인 방법을 사용한다. 연속변수인 k 와 h 는 공액 경사 알고리즘을 이용하여 구하고, 국부최적해를 방지하기 위해 근사식을 이용한 초기해 설정 방법을 제안한다. 최종적으로 계산되어 얻어진 최소비용들을 비교하여, 그 중에서 최소 비용을 갖는 n 과 ARL의 경제적 값과 이를 만족시키는 최적 k 와 h 값의 최적해를 구한다[5].

Duncan은 표본추출구간과 관리한계선의 너비 계수와의 결정 값을 통한 총비용함수

의 관계를 시뮬레이션을 통하여 결정하였다[12]. 또한 Montgomery[9][10]는 [표 1]와 같이 9개의 모수를 미리 결정 한 다음 그에 따른 최적의 관리한계선 너비 계수(k)와 표본추출구간(h), 제 1종 오류, 검정력, 비용을 모의 실험하였다[3]. 이와 같은 방법으로 Z_p CUSUM 관리도의 경제적설계의 비용(L)을 효율적으로 최소화하는 것이다.

[표 1] 모수와 모수 결정 값

모수	b	c	W	T	M	λ	δ	e	D
모수의 결정값	1.0	0.1	25.0	50.0	100.0	0.05	2.0	0.0167	1.0

그리고, 공정 이동의 크기에 따른 관리도의 민감도를 알기 위해서는 평균공정이동 크기를 $\delta=2.00$ 에서 $\delta=1.00$ 으로 변화시켜서 그 비용을 분석해 볼 수 있다.

또한 비용 감소의 주 원인은 ARL 즉, 관리상대하에서의 평균 런 길이가 크게 증가하기 때문이다. 따라서 오류 신호로 인하여 발생하는 비용은 감소하고, 이상상태를 방치함으로써 발생하는 비용 또한 증가하지 않기 때문에 Z_p CUSUM 관리도를 \bar{X} 관리도와 CUSUM 관리도보다 더 경제적으로 설계하는 모델을 개발하는 접근방법이 필요하다.

6. 결 론

이상원인 발생률이 증가할수록 최소 비용이 증가한다. 반면, 최소 비용의 감소율은 다소 감소한다. 이는 이상원인의 발생률이 낮을수록 Z_p CUSUM 관리도가 더 경제적인임을 증명 할 수 있다[18-1].

하나의 비용요소가 증가하면, 최소 비용 또한 증가함으로써 비용모델의 일관성을 알 수 있을 것이다. 공정평균변동(δ)값이 작을수록 표본크기 n이 증가하고, Z_p CUSUM 관리도의 ARL값은 변함이 없거나 다소 증가할 것이다. 이는 공정평균의 작은 이동을 발견하기 위해 CUSUM 관리도의 민감도를 높여야 하기 때문이다. 이로 인하여 최소 비용도 증가할 것이다.

공정평균변동(δ)값이 작을수록 최소비용의 감소율이 다소 증가하는 경향을 보이면, Z_p CUSUM 관리도가 공정평균의 작은 이동을 관리하는데 더 효율적이며, 동시에 불량률을 관리할 수 있는 경제적 설계를 고려한 관리도로 증명될 것이다.

7. 참 고 문 헌

- [1] 김용덕, “합성관리도의 경제적 설계”, 송실대학교 대학원, 석사학위논문, 2003.
- [2] 김종걸, 엄상준, “미세변동공정관리를 위한 가속수명시험관리도 설계”, 대한안전경영과학회지, Vol.14(3), pp.167-174, 2012.
- [3] 박구연, “통계적 제약하에서 다중기준에 근거한 관리도의 경제적 설계에 관한 연구”, 석사학위논문, 송실대학교, 2002.
- [4] 엄상준, “공정평균과 극소불량률 동시관리체계에 관한 연구”, 성균관대학교 대학원 박사학위논문, 2012.
- [5] 임태진, 공정능력분석 및 관리도 설계, 송실대학교 출판부, 2005.
- [6] Brook, D., Evans, D. A., “An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length,” *Biometrika*, Vol.59(3), pp539-549, 1972.
- [7] Duncan A.J., “The Economic Design of \bar{X} -Charts When There is a Multiplicity of Assignable Causes”, *Journal of the American Statistical Association*, v.66 no.333, pp.107-121, 1971.
- [8] Duncan A.J., “The Economic Design of \bar{X} Charts used to maintain current control of a process”, *Journal of the American Statistical Association*, v.51 no.274, pp.228-242, 1956.
- [9] Douglas C. Montgomery, “Economic Design of an \bar{X} control Charts”, *Journal of Quality Technology*, Vol.14, pp.40-43, 1982.
- [10] Douglas C. Montgomery, “The Economic Design of an control Charts : A Review and Literature”, *Journal of Quality Technology*, Vol.12, No. 2, pp.75-87, 1980.
- [11] Douglas C. Montgomery, “Statistical Quality Control”, 6th, p409, 2009.
- [12] Douglas C. Montgomery, “Statistical Quality Control”, 6th, pp.463-pp.472, 2009.
- [13] Gan, F. F., “Design of Optimal Exponential CUSUM Control Chart,” *Journal of Quality Technology*, Vol.26(2), pp109-124, 1994.
- [14] Girshick, M. A. and H. Rubin, “A Bayes’ Approach to a Quality Control Model”, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 23, No.01, 1952.
- [15] Goel, A. L., Jain, S. C., and Wu, S. M., “An Algorithm for the Determination of the Economic Design of \bar{X} Charts Based on the Duncan’s Model”, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 63, No. 321, 1968.
- [16] Goel and Wu, “Economically Optimum Design of CUSUM Charts”, *Management Science*, Vol. 19, pp.1271-pp.1282, 1973.
- [17] Hawkins, D. M., “A Fast, Accurate Approximation of Average Run Lengths of CUSUM Control Charts,” *Journal of Quality Technology*, Vol.24(1), pp37-43, 1992.
- [18] Shaniga, E, M, “Joint Economically Optimal Design of \bar{X} and R Control

- Charts", Management Science, Vol. 24, No. 04, 1978.
- [19] Shaniga, E, M, "Economic Statistical Design of Control Charts with an Application to \bar{X} and R charts", Technometrics, Vol. 31, pp.313-320, 1989.
- [20] Siegmund, D., Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [21] Thomas J. Lorenzen and lonnie C. Vance, "The Economic Design fo Control Charts: A Unified Approach", Technometrics, Vol. 28, No. 1, pp.3-10, 1986.
- [22] Taylor, H. W., "The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts", Technometrics, Vol.10, No. 3, pp.479-488, 1968.
- [22] W.K Chiu, "The Economic Design of Cusum Charts for Controlling Normal Means", Journal of the Royal Statistical Society, Series C(Applied Statistics), Vol. 23, No. 3, pp.420-433, 1974.
- [23] Woodall W.H., "Weaknesses of the economic Design of Control Charts", Technometrics, Vol. 28, No. 4, pp.408-409, 1986.
- [24] Woodall, W. H., Adams, B. M., "The Statistical Design of CUSUM Charts," Quality Engineering, Vol.5(4), pp559-570, 1993.