

# 다단 회전축계 형상의 진동 연구

## Vibration Analysis of a Multi-Stage Rotating Shaft Shape

송오섭† · 박상윤\* · 강성환\* · 서정석\* · 김선홍\*

OhSeop Song, Sangyun Park, Sunghwan Kang, Jungseok Seo and Sunhong Kim

**Key Words :** Multi-stage rotating shaft(다단 회전축계), Hamilton's principle(해밀턴 원리), Vibration analysis(진동해석)

### ABSTRACT

This paper contains various vibration analysis of multi-stage shaft shape such as the bending, torsional and axial vibration. The shaft system is modeled as Timoshenko beam with the transverse shear and rotary inertia effect and the equation of motion is derived by Hamilton's principle with considering clamped-free boundary condition. Then, eigenvalue problem of discrete equation of motion for multi-stage shaft model is solved and got results of the natural frequency through the numerical analysis. Obtained numerical analysis results through Matlab program were compared with those of FEM analysis to verify the results. This study suggests that design of shaft system be consider torsional and axial vibration as well as bending vibration.

### 기호설명

- $r_i$ :  $i$  번째 단의 반지름
- $A_i$ :  $i$  번째 단의 면적
- $I_i$ :  $i$  번째 단의 면적 2 차 모멘트
- $m_i$ :  $i$  번째 단의 단위 길이 당 질량
- $L$ : 다단 회전 축계 모델의 전체 길이
- $\rho$ : 축계 모델의 밀도
- $k_g$ : 전단보정인자

진동수를 파악하여 공진(resonance)을 회피하도록 축계의 설계 변수를 조정한다.

주로 대형 터빈 발전기는 여러 개의 로터(rotor)가 연결되어 있기 때문에 비틀림 강성이 낮아 운전속도까지 여러 개의 고유진동수를 포함하고 있다. 따라서, 설계 단계에서 축계의 비틀림 진동 문제<sup>(1,2)</sup>가 중요하게 고려된다.

국내에서도 많은 연구진들의 노력으로 원자력 터빈 발전기의 축계 비틀림 진동해석<sup>(3,4)</sup>, 선박 및 자동차 엔진의 추진 축계의 비틀림 진동 해석<sup>(5,6)</sup> 등... 지금까지 선박, 자동차 및 산업 기계의 축계 진동 해석에 관한 연구가 많이 진행되어 왔다.

Gosiewsk 는<sup>(7)</sup> 회전기계에서 발생하는 횡 진동과 비틀림 진동의 연성 현상이 회전체(rotor)에 불안정한 거동을 보일 수 있음을 확인하고 근궤적법(root locus method)을 사용하여 불안정한 진동영역을 알아낸 연구를 수행하였다. Darpe 외 공동 연구자들은<sup>(8)</sup> 크랙(crack)이 존재하는 회전축계(rotating shaft)의 굽힘, 종 방향(Longitudinal) 및 비틀림 진동(torsional vibration)의 연성(couple)에 관한 연구를 수행하였다.

축계 시스템의 해석을 위한 모델링 방법에는 전달행렬법(transfer matrix method), 집중질량법과

### 1. 서 론

선박, 자동차와 같은 수송 기계를 비롯하여 많은 기계 장치에서 동력을 전달하기 위해 축(shaft)을 사용하고 있다. 축의 설계를 고려할 때, 강도(strength) 및 강성(stiffness)과 더불어 진동 설계(vibration design)가 중요한 부분을 차지하고 있다. 진동 설계에서는 주로 축계(shafting)의 자유진동 해석(free vibration analysis)을 통해 고유

† 교신저자; 충남대학교, 기계공학과

E-mail : songos@cnu.ac.kr

Tel : (042)821-5650, Fax :(042)822-5642

\* 충남대학교, 대학원

유한요소법과 같은 direct matrix method 와 보 이론(beam theory)이 적용될 수 있다.

본 연구에서는 단순한 다단 축계 모델(multi-stage shaft model)을 티모센코 보(timoshenko beam)이론을 적용하여 축계에서 발생하는 횡 진동(lateral vibration), 비틀림 진동(torsional vibration), 축 진동(axial vibration)의 결과를 FEM 에서 얻은 결과와 비교함으로써 해석 결과의 타당성을 검증하였고, 실제 축계 시스템을 갖는 고유진동수 해석에 응용할 수 있도록 하였다.

## 2. 수학적 모델링

### 2.1 다단 축계 시스템

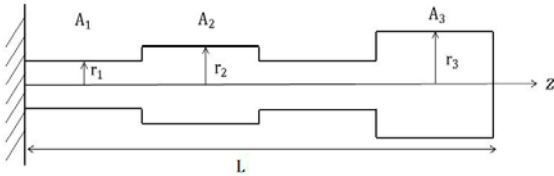


Fig. 1 Geometry of multi-stage rotating shaft shape

위의 그림1은 본 연구의 대상체인 원형 단면을 갖는 다단 축계 형상의 평면도를 보여주고 있다.

축계 단면의 크기가  $A_1 < A_2 < A_3$ 의 순으로 되어 있기 때문에 각 단면의 질량과 관성모멘트도 각각 다른 값을 갖게 된다. 따라서, 진동해석을 위한 다 단 축계 형상을 모델링을 할 때, 단위계단 함수(unit step function)<sup>(9)</sup>를 사용하여 z-축 방향으로 서로 다른 값을 갖는 각 단면의 면적과 질량 및 관성모멘트 값을 포함한 다단 축계의 형상을 모델링 할 수 있다.

단위계단 함수를 이용하여 축계의 전체 단면적, 질량, 관성모멘트를 식(1)과 같이 정의할 수 있다.

$$[A(z)] = \sum_{i=1}^N A_i(z) [U(z - z_i) - U(z - z_{i+1})] \quad (1a)$$

$$[m(z)] = \sum_{i=1}^N m_i(z) [U(z - z_i) - U(z - z_{i+1})] \quad (1b)$$

$$[I(z)] = \sum_{i=1}^N I_i(z) [U(z - z_i) - U(z - z_{i+1})] \quad (1c)$$

여기서,  $N$ 은 축계의 다단을 구분해주는 구분 (segment)개수를 의미하며,  $A$ 는 면적,  $m$ 은 질량,  $I$ 는 면적 2차 모멘트를 의미한다.

### 2.2 축계의 운동방정식

본 연구에서는 축계 시스템을 횡 전단변형 (transverse shear)과 회전관성(rotary inertia) 효과를 고려한 티모센코 보(timoshenko)이론에 기초한 해밀턴 원리(hamilton principle)에 의한 방법으로 운동방정식을 유도하였다.<sup>(11)</sup>

(1) 해밀턴 원리(Hamilton's principle)

식(2)는티모센코보 이론을 적용하여 변형에너지 (strain energy)와 운동에너지(kinetic energy)의 변분의 값을 나타낸 해밀턴 원리 식이다. .

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} [T - U] dt = 0 \quad (2)$$

$$* t = t_0, t = t_1: \delta v = \delta \theta = 0$$

여기서  $T, U$ 는 각각 운동에너지, 변형에너지를 나타내며 이들의 변분은 식(3)과 (4)와 같다.

$$\delta T = \int_0^L [m\dot{v}\delta\dot{v} + J\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + \rho I\dot{\phi}\delta\dot{\phi} + b\dot{w}_0\delta\dot{w}_0] dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta U = & [EI\theta\delta\theta]_0^L - \int_0^L [EI\theta']\delta\theta dx \\ & + [k^2GA(v' - \theta)\delta v]_0^L - \int_0^L [k^2GA(v' - \theta)'\delta v] dx \\ & - \int_0^L [k^2GA(v' - \theta)\delta\theta] dx - \int_0^L [GI\phi'\delta\phi] dx \\ & - \int_0^L [\rho r^2Ew_0'\delta w_0'] dx \end{aligned} \quad (4)$$

(2) 운동방정식(Equation of motion)

식(3), (4)를 부분적분 하여 해밀턴 식(2)에 대입하여 정리하면,  $v$ 와  $\theta$ 에 관한 식은  $x, y$  축 2방향의 병진변위와 회전변위에 관한 4개의 굽힘 진동 (bending vibration)식<sup>(9)</sup>으로 유도되며,  $\phi$ 와  $w_0$ 는 각각 비틀림 진동(torsional vibration)과 축 방향 진동 (axial vibration)식<sup>(10)</sup>으로 유도할 수 있다.

굽힘, 비틀림 및 축방향 운동방정식을 식(5)와 같이 정리할 수 있다.

$$\delta u_0: K_s u_0'' + K_b \theta_y'' - m \ddot{u}_0 = 0 \quad (5a)$$

$$\delta v_0: K_s v_0'' + K_s \theta_x'' - m \ddot{v}_0 = 0 \quad (5b)$$

$$\delta \theta_y: K_b \theta_y'' - K_s u_0' - K_s \theta_y - J \ddot{\theta}_y = 0 \quad (5c)$$

$$\delta \theta_x: K_b \theta_x'' - K_s v_0' - K_s \theta_x - J \ddot{\theta}_x = 0 \quad (5d)$$

$$\delta\phi: K_t \phi'' - \rho I \dot{\theta} = 0 \quad (5e)$$

$$\delta w_0: \pi r^2 E w_0'' - b \dot{w}_0 = 0 \quad (5f)$$

여기서  $K_s$ ,  $K_b$ ,  $K_t$ 는 각각 전단 강성, 굽힘 강성, 비틀림 강성을 의미하며  $b$ 는 축 방향 운동방정식의 질량 상수 계수를 의미한다.

### 2.3 경계조건에 따른 변위함수 선정과 진동해석

본 연구에서는 한쪽만 고정된 경계조건을 갖는 보의 진동해석으로 고정단 조건을 만족하는 변위 함수를 식(6)과 같이 선택할 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_y \\ \theta_x \\ \phi \\ w_0 \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_n u_j(z) \\ b_n v_j(z) \\ c_n y_j(z) \\ d_n x_j(z) \\ e_n k_j(z) \\ f_n w_j(z) \end{Bmatrix} q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} z^n \\ z^n \\ z^n \\ z^n \\ z^n \\ z^n \end{Bmatrix} q(t) \quad (6)$$

여기서  $j$ 는 보의 길이 방향 모드 형상의 차수를 의미한다.  $(u_j(z), v_j(z), y_j(z), x_j(z), k_j(z), w_j(z))$ 는 기하학적 경계조건을 만족하는 시험 함수(trial functions)를 의미하며,  $(a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, f_j)$ 는 임의의 상수 계수 값(arbitrary constants)을 의미하며,  $q(t) = e^{i\omega t}$ 의 값을 나타낸다.

확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식(6)을 해밀턴 원리인 식(2)에 대입하여 정리하면 고정단 경계조건을 만족하는 이산화 된 운동방정식(discrete equation of motion)인 식(7)을 얻을 수 있다.

$$\{\omega^2 [M] + [K]\} \{x_i\} = 0 \quad (7)$$

여기서, 질량 행렬(mass matrix)  $[M]$ 과 강성행렬(stiffness matrix)  $[K]$ 는  $6n \times 6n$  대칭행렬(symmetric matrix)이고,  $\{x_i\}$ 는  $6n \times 1$  고유 벡터(eigenvectors)이다. 이 때,  $n$ 은 축 방향 모드 차수를 의미하며 이 값이 커질수록 행렬의 크기가 커지게 된다.

일반적으로 수치해석을 할 때,  $n$ 의 개수를 증가시킴으로써 계산된 고유치가 실제 값과 거의 비슷하게 가까워진다.

### 3. 수치해석 및 고찰

수치해석으로 사용된 재료는 Steel 이며, 그림1의 축계 형상의 Dimensions과 물성치는 표1과 같다.

여기서,  $E$ 와  $G$ 는 각각 재료의 탄성계수(modulus of elasticity)와 전단탄성계수(shear modulus of elasticity)를 의미하며,  $\rho$ 는 밀도,  $k_s$ 는 단면에 따라 다른 상수값을 갖는 전단보정계수(shear correction factor)를 나타낸다.

**Table1** Dimensions and property of multi-stage shaft model

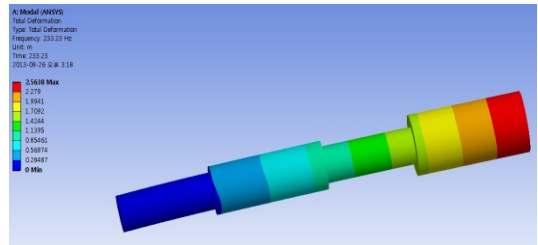
	$r_1$ (m)	$r_2$ (m)	$r_3$ (m)	$L$ (m)
Dimensions	0.0075	0.01	0.0125	0.182
	$E$ (N/m <sup>2</sup> )	$G$ (N/m <sup>2</sup> )	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$k_s$
Property	$200 \times 10^9$	$90 \times 10^9$	7800	1.1

본 연구에서는 수치해석으로 Matlab 프로그램과 Ansys workbench 프로그램을 사용하여 다단 축계 형상의 고유진동수 값을 표2와 같이 비교하였다.

**Table2** Natural frequency results of numerical analysis and FEM

	FEM(Hz)	Matlab(Hz)	Error(%)
1 <sup>st</sup> bending	233.23	236.55	1.42
2 <sup>nd</sup> bending	233.49	236.55	1.31
3 <sup>rd</sup> bending	1730.1	1779.8	2.87
4 <sup>th</sup> bending	1731	1779.8	2.81
5 <sup>th</sup> torsion	2312.1	2466.8	6.69
6 <sup>th</sup> bending	5239.4	5451.6	4.05
7 <sup>th</sup> bending	5247.4	5451.7	3.89
8 <sup>th</sup> axial	5333.7	5490	2.93
9 <sup>th</sup> torsion	8238.2	8706	5.67

아래 그림은 Ansys workbench 프로그램을 사용하여 한쪽은 고정되며 다른 한쪽은 자유단 경계조건을 만족하는 원형 단면을 갖는 다단 회전축 계 모델의 자유진동해석을 수행하여 각각의 모드 형상 결과를 보여준다.



**Fig. 2** 1<sup>st</sup> bending mode shape of multi-stage shaft model

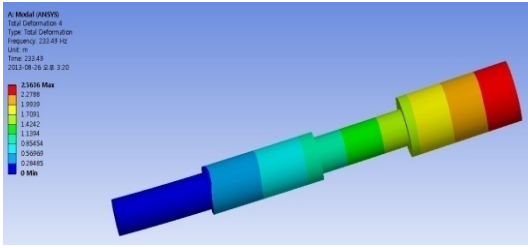


Fig. 3 2<sup>nd</sup> bending mode shape of multi-stage shaft model

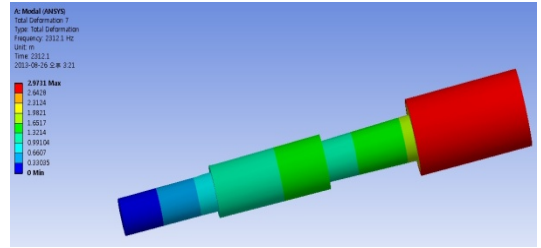


Fig. 6 5<sup>th</sup> torsional mode shape of multi-stage shaft model

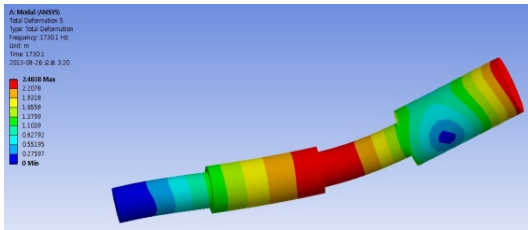


Fig. 4 3<sup>rd</sup> bending mode shape of multi-stage shaft model

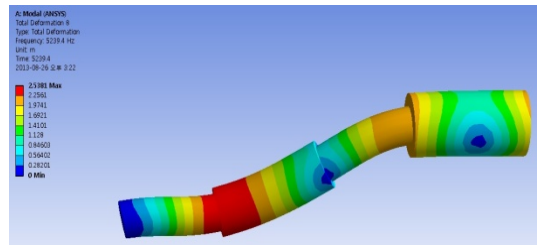


Fig. 7 6<sup>th</sup> bending mode shape of multi-stage shaft model

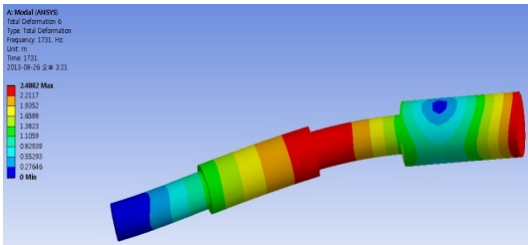


Fig. 5 4<sup>th</sup> bending mode shape of multi-stage shaft model

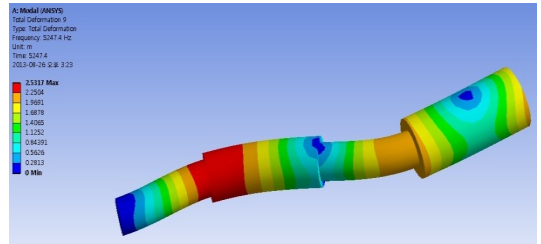


Fig. 8 7<sup>th</sup> bending mode shape of multi-stage shaft model

표 2의 FEM과 matlab 해석 결과를 통해 굽힘 진동(bending vibration), 비틀림 진동(torsional vibration), 축 진동(axial vibration)의 결과가 나타남을 확인할 수 있었다. 9개의 진동모드 중 6개가 굽힘 진동이 나타났고, 비틀림 진동은 2개, 축 진동은 1개가 나타남을 확인하였다. 이는 식(5)에서 유도한 운동방정식을 통해 굽힘 진동(bending vibration)에 관한 식이 비틀림 진동과 축 진동의 식보다 많아 고유치 해석시 더 많은 고유치(eigenvalue)가 나타나기 때문임을 확인할 수 있다.

특히, 6개의 굽힘 진동모드의 결과를 비교했을 때, 차수가 올라갈수록 오차의 범위가 대략 1.4%에서 2.8%, 4%로 조금씩 커지는 것을 확인할 수 있었다. 그림2~5와 그림7~8은 굽힘 진동(bending vibration)의 모드 형상(mode shape)을 보여주고 있다.

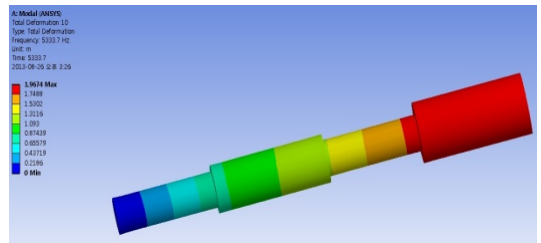


Fig. 9 8<sup>th</sup> axial mode shape of multi-stage shaft model

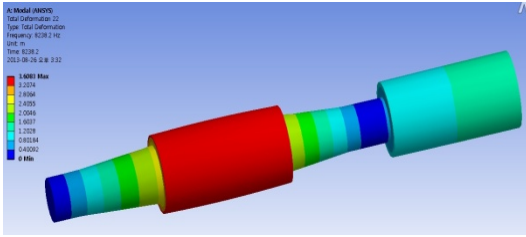


Fig. 10 9<sup>th</sup> torsional mode shape of multi-stage shaft model

그림 9는 축 진동(axial vibration)의 모드형상을 보여 주고 있다. 축 진동의 고유진동수는 첫 번째로 나타나는 고유진동수 값이 굽힘 진동수와 비틀림 진동수에 비해 비교적 높은 값을 가졌고, 9개의 모드 중에서도 한 개밖에 나타나지 않는 것을 확인하였다. 축 진동의 오차 범위는 대략 3%이내로 나타나는 것을 확인할 수 있었다.

### 3. 결론

본 연구에서는 steel 재료의 원형 단면을 갖는 단순 단단 회전축계 모델을 티모센코 보로 모델링 하여 Hamilton의 원리로 굽힘 진동, 비틀림 진동, 축 진동의 운동을 표현한 운동방정식을 식(5) 같이 유도하였다. 시험 함수(trial function)를 식(6)과 같이 축 방향 z에 대한 일차함수로 사용하여 캔틸레버보의 모드 형상 조건을 만족하는 변위 함수를 만족시킬 수 있었다.

공학용 수치해석 프로그램인 Matlab과 CAE 상용 프로그램인 Ansys workbench를 사용하여 고유치 해석을 수행함으로써 굽힘 진동, 비틀림 진동 및 축 진동에 대한 고유진동수와 모드 형상을 구하였다. 두 해석 결과의 비교를 통해 비교적 얇은 축계 모델의 해석 수행시 티모센코보로 모델링하여 수치 해석을 하는 것이 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다.

해석 결과, 1차 굽힘 진동과 축 진동의 오차 범위는 3%이내로 거의 비슷한 값을 보였고, 비틀림 진동의 값은 7%이내의 값으로 약간의 차이가 나타남을 확인하였다.

### 참고 문헌

(1) Fred, R. Szenasi., Analysis of Torsional Vibration in Rotating Machinery, Proceedings of the twenty-second Turbomachinery Symposium.

(2) Qing, H., Dongmei, D., 2010, Modeling and Calculation Analysis of Torsional Vibration for Turbine Generator Shaft, Journal of Information & Computational Science, pp.2174~2182.

(3) Kim, Y. H., Son, B. G., Choi, B. K., Yang, B.S., Ha, H.C., 1998, Vibration Analysis of Hydraulic Turbine-Generator Rotor, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp.250~254.

(4) Lee, H. S., Yoo, S. Y., 2013, Effects of Generator Retrofit on Torsional Natural Frequency of Turbine-Generator Train and Study on Measurement Results, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol.23, No.3, pp.267~273.

(5) Son, S. T., Kim, J. R., 2007, A Study on the Analysis of Torsional Vibration of Branched Shafting System for Propulsion and Lift in Air Cushion Vehicle, Journal of the Korean Society of Marine Engineering, Vol.31, No.4, pp.335~342.

(6) Kim, W. H., Lee, S. M., 2007, Investigation of Torsional Vibration Characteristics of Marine Diesel Engine Crankshaft System, 14th International Congress on Sound & Vibration.

(7) Gosiewski, Z., 2008, Analysis of Coupling Mechanism in Lateral/Torsional Rotor Vibrations, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 46, No. 4, pp.829~844.

(8) Darpe, A. K., Gupta, K., Chawla, A., 2004, Coupled Bending, Longitudinal and Torsional Vibrations of a Cracked Rotor, Journal of Sound and Vibration, pp.33~60.

(9) Song, O. S., Park, S. Y., Seo, J. S. and Kang, S. H., 2012, Vibration and Stability Analysis of a Non-Uniform Shaft Carrying Tip Masses, Proceedings of the KSME Annual Autumn Conference, pp.1740~1743.

(10) Librescu. L., Song, O.S., Thin-Walled Composite Beams Theory and Application, Springer.

(11) Park, S.Y., Kim, S. K., Choi, J.W and Song, O.S., 2012, Vibration Analysis of Composite Cylindrical Shells Subjected to Electromagnetic and Thermal Fields, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol.22, No.8, pp.791~799.

## 후 기

이 논문은 2012 년도 교육과학기술부(한국연구재단)의 지원을 받아 수행된 일반연구자 지원사업(기본연구)임.

## 부 록

**A.1** 식(5)의 강성계수와 질량 계수 값

$$K_b = EI, K_s = kGA, K_t = GI, b = 2\pi r^2 \rho$$

**A.2** 식(7)의 질량 행렬 $M_{ij}$ , 강성 행렬 $K_{ij}$

$$M_{11} = \int_0^L m u_i u_j dz,$$

$$M_{22} = \int_0^L m v_i v_j dz$$

$$M_{33} = \int_0^L J y_i y_j dz$$

$$M_{44} = \int_0^L J x_i x_j dz$$

$$M_{55} = \int_0^L \rho I k_i k_j dz$$

$$M_{66} = \int_0^L b w_i w_j dz$$

$$K_{11} = - \int_0^L K_s u_i' u_j' dz$$

$$K_{13} = - \int_0^L K_s u_i' y_j dz$$

$$K_{22} = - \int_0^L K_s v_i' v_j' dz$$

$$K_{24} = - \int_0^L K_s v_i' x_j dz$$

$$K_{31} = - \int_0^L K_s y_i u_j' dz$$

$$K_{33} = - \int_0^L (K_b y_i' y_j' + K_s y_i y_j) dz$$

$$K_{42} = - \int_0^L K_s x_i v_j' dz$$

$$K_{44} = - \int_0^L (K_b x_i' x_j' + K_s x_i x_j) dz$$

$$K_{55} = - \int_0^L K_t k_i' k_j' dz$$

$$K_{66} = - \int_0^L \pi r^2 E w_i' w_j' dz$$