

# 전달 매트릭스를 이용한 초기 비틀림각을 가진 균일한 티모센코 보의 연성된 굽힘 진동해석

## Analysis of Coupled Bending Vibration of the Pre-twisted Uniform Timoshenko Beam using Transfer Matrix Method

이정우\* · 최상훈\* · 김낙점\* · 신동호\*\* · 이정윤†

Jung Woo Lee, Sang Hoon Choi, Nak Jeom Kim, Dong Ho Shin and Jung Youn Lee

법의 정확성을 검증하기 위하여 ANSYS를 통하여 얻어진 결과와 비교 하였다.

### 1. 서 론

비틀림각(twist angle)을 가진 빔요소의 고유진동 특성(natural vibration characteristics)은 지난 반세기 동안 근사법, 유한요소법, 전달 행렬법과 같은 수치해석적 방법을 이용하여 많은 연구가 진행되었고 비틀림보의 경우 터빈 블레이드, 헬리콥터 로터 블레이드 등 공학적 설계에 중요하다.

Banerjee(2004) 와 Lin(2001)이 해밀턴의 원리(Hamilton's principle)을 이용하여 초기 비틀림각을 가진 티모센코보에 대한 지배 미분방정식을 유도하였고 전자는 균일한 보에 대하여 동강성법(Dynamic stiffness method)을 이용한 유한요소법(F.E.M)으로 후자는 비 균일보한 보에 대하여 전달행렬 법으로 베르누이-오일러(Bernoulli-euler)보에 대한 연성된 굽힘 진동의 고유진동 특성의 해를 구하였다.

본 논문에서도 비틀림각을 가진 균일한 티모센코 보에 대한 지배 미분방정식을 해밀턴의 원리를 이용하여 유도 하였으며, 전달 행렬법을 이용하여 비틀림보의 고유진동수와 모드형상인 동특성의 해를 구하였다. 기존에 연구된 전달행렬법과의 차이점은 기존의 연구들은 장행렬(Field matrix)와 점행렬(Point matrix)로 구분되어 전달 행렬이 만들어지지만 현재의 방법은 통합된 전달행렬만이 존재한다.

본 논문에서 제안한 방법은 1개의 요소만으로도 정확한 고유진동특성을 얻을 수 있으며, 제안된 방

### 2. 이 론

#### 2.1 전달행렬법

##### (1) 지배 미분방정식

연성된 굽힘 진동의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$-\rho A \ddot{v} + k_y A G v'' - k^2 k_z A G v + k A G (k_y + k_z) w' \quad (1)$$

$$+ k_y A G \psi' - k k_z A G \theta = 0$$

$$-\rho A \ddot{w} + k_z A G w'' - k^2 k_y A G w - k A G (k_y + k_z) v' \quad (2)$$

$$- k k_y A G \psi - k_z A G \theta' = 0$$

$$-\rho I_y \ddot{\theta} + E I_{yy} \theta'' - k^2 E I_{zz} \theta - k_z A G \theta - k k_z A G v \quad (3)$$

$$+ k_z A G w' + k (E I_{yy} + E I_{zz}) \psi' = 0$$

$$-\rho I_z \ddot{\psi} + E I_{zz} \psi'' - k^2 E I_{yy} \psi - k_y A G \psi - k k_y A G w \quad (4)$$

$$- k_y A G v' - k (E I_{yy} + E I_{zz}) \theta' = 0$$

식(1-4)의 해가 다음과 같다면

$$v(x,t) = V(x)e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$$

$$\theta(x,t) = \Theta(x)e^{i\omega t}$$

$$\psi(x,t) = \Psi(x)e^{i\omega t}$$

식(5)를 식(1-4)에 대입하고  $V, W, \Theta, \Psi$  중 3개의 변수를 제거함으로써 하나의 통합된 8차 방정식을 얻을 수 있다. 전달행렬의 형태는 다음과 같이 표현된다.

$$\{Z\}_{i+1} = [T_{ij}] \{Z\}_i \quad (6)$$

여기서,  $Z$ 는 상태벡터 이며  $T$ 는 전달 행렬이고,

$$\{Z\}_{i+1} = [w, v, \psi, \phi, -M_z, -M_y, -V_y, V_z]^T$$

$$\{Z\}_i = [w, v, \psi, \phi, -M_z, -M_y, -V_y, V_z]^T \text{이다.}$$

Fig. 1은 비틀림 각을 가진 보 요소에 대해 사용된 표기법과 좌표계이다.

† 교신저자: 정희원, 경기대학교 기계 시스템 공학부  
E-mail : jyilee@kgu.ac.kr

Tel : 031-249-9811 , Fax : 031-244-6300

\* 한전KPS(주) 기술연구원

\*\* 세종공업(주)

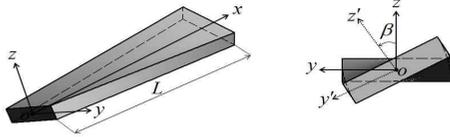


Fig. 1 Coordinate system and notation

## 2.2 적용 예

현재의 방법을 증명하기 위하여 사용된 보 요소의 물성치는 Table 1과 같다.

Table 1 Material properties for Euler beam

Notation	Description	Value
$EI_{zz}$	Bending stiffness of in-plane	$5333.333Nm^2$
$EI_{yy}$	Bending stiffness of out-of-plane	$21333.33Nm^2$
$m$	The mass per unit length	$6.28 kg/m$
$L$	The length of beam	$0.2 m$
$E$	elastic modulus	$200 GPa$
$G$	Shear modulus	$76.923 GPa$
$k_y, k_z$	Shear deformation coefficient	$0.8496732$
$A$	The cross-sectional area	$0.0008 m^2$
$\rho$	Density of the beam material	$7850 kg/m^3$

## 2.3 적용 결과

제안된 전달행렬법으로 얻어진 자유진동특성 결과를 ANSYS를 통하여 얻어진 결과들과 비교 하였으며 Table 2~3은 0, 45, 90도 비틀림 각을 가진 보에 대한 고유진동수 결과 값이다.

Table 2 The first five natural frequencies for a twisted beam. (0 and 45 deg.)

Mode Number	Natural frequencies (Hz)			
	$\beta=0$		$\beta=45$	
	Present	ANSYS	Present	ANSYS
1	404.52	408.01	406.39	409.10
2	791.09	795.52	774.80	778.46
3	2425.97	2446.00	2483.33	2500.80
4	4268.19	4293.10	4131.65	4150.50
5	6385.56	6442.20	6593.04	6646.10

Table 3 The comparison results between Bernoulli-Euler and Timoshenko theory. (90 deg.)

Mode Number	Natural frequencies (rad/s)		
	$\beta=90$		
	Present	Bernoulli-Euler theory	Error(%)
1	411.98	416.27	1.04
2	734.12	751.95	2.43
3	2636.88	2844.29	7.87
4	3840.18	4343.64	13.11
5	7075.66	8460.55	19.57

Fig. 2~3은 비틀림 각이 45도 일때의 굽힘 변위를 나타낸 것이다. Fig. 2에서 점선은 YZ 평면에서의 굽힘 진동모드이고, 실선은 XZ평면에서의 굽힘 진동모드이다. 또한, Fig. 3은 ANSYS를 통하여 얻어진 굽힘 모드형상이다.

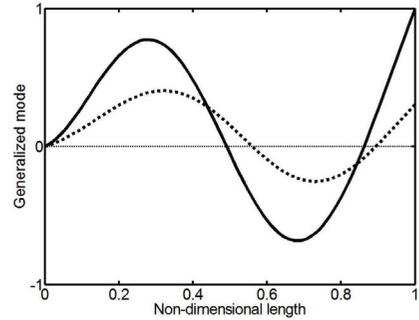
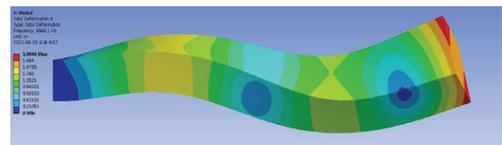
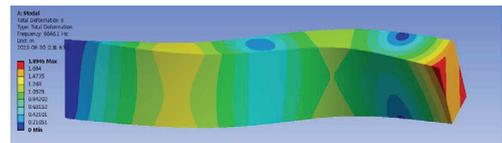


Fig. 2 Fifth bending displacements for a twisted beam.(45 deg.)



(a) Fifth bending displacement of in-plane



(b) Fifth bending displacement of out-of-plane

Fig. 3 Fifth mode shape given by ANSYS

## 3. 결론

본 연구에서 제안된 방법은 단 한 개의 요소만으로 균일한 보의 정확한 고유진동수와 모드형상을 얻을 수 있다는 것을 ANSYS와의 비교를 통하여 확인할 수 있었다.

1) 단 한개의 구조물 요소로 정확 해를 얻을 수 있는 방법을 제시하였다.

2) 질량이 Lumped mass가 아닌 등분포 질량을 부가 할 수 있는 방법을 제시 하였다.

3) 전달행렬이 등분포질량과 강성을 사용함으로써 장행렬과 점행렬이 아닌 하나의 행렬로 통합되었다.