

# 원판 링형 압전변환기의 복합진동 특성

## Coupled Vibration Characteristics of Piezoelectric Hollow-Disk Transducers

박춘광\* · 김진오†

Chunguang Piao, Jin Oh Kim

### 1. 서 론

초음파 센서 또는 초음파 액추에이터의 변환기(transducer)에 많이 사용되는 압전소자는 대개 원판형이다.<sup>(1)</sup> 압전소자를 적층할 필요가 있을 때 중심을 관통하는 볼트로 체결하며, 압전 원판은 중앙이 비어있는 링형이다.<sup>(2)</sup> 압전변환기를 설계하기 위해서는 압전소자의 진동을 해석할 필요가 있다.

원판형 압전변환기의 반경방향 및 두께방향 진동 특성 해석은 이미 보고되어 있다.<sup>(3)</sup> 원판 링형 압전변환기의 반경방향 진동특성 해석도 발표되었다.<sup>(4)</sup> 포화송(Poisson)비에 의해 반경방향과 두께방향 진동이 동시에 발생한다. 따라서 압전변환기를 설계할 때 반경방향 진동뿐만 아니라 두께방향 진동 해석도 필요하다.

본 논문은 원판 링형 압전변환기의 반경방향 및 두께방향 복합진동 특성을 다룬다. 원판 링형 압전변환기를 모델링하고, 반경방향 및 두께방향에서의 운동방정식과 경계조건을 설정하여, 고유진동수와 모드 형상을 구한다.

### 2. 두께방향 진동 특성

해석 대상인 원판 링형 압전변환기는 Fig. 1과 같이 두께가  $l$ 이고 안쪽 반지름과 바깥 반지름이 각각  $r_i$ 와  $r_o$ 이다. 양쪽 면에 분포된 전극에 작용하는 전압  $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동된다.

원판 링형 압전변환기에서 두께방향 진동의 지배방정식은 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2)$$

여기서  $c (= \sqrt{\widehat{c_{33}/\rho}})$ 는 파동 전파속도이고  $\widehat{c_{33}} (= c_{33} + e_{33}^2/\epsilon_{33}^S)$ 는 수정된 탄성계수이다. 변수 분리한 운동 변위는 다음과 같다.

$$w(r, z, t) = W(z)R(r)e^{j\omega t} \quad (3a)$$

$$\phi(r, z, t) = \Phi(z)R(r)e^{j\omega t} \quad (3b)$$

변환기의 양면이 자유로운 경우 두께방향 경계조건을 다음과 같이 설정한다.

$$z=0 \text{에서} \quad \sigma(z) = 0 \quad (4)$$

$$\Phi(z) = 0 \quad (5)$$

$$z=l \text{에서} \quad \sigma(z) = 0 \quad (6)$$

$$\Phi(z) = V_0 \quad (7)$$

경계조건 (4)~(7)을 적용하여 식(1)~(2)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$W(z) = \frac{e_{33} V_0 [\cos kz - \cos k(l-z)]}{\widehat{c_{33}} kl \sin kl - 2 \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} (1 - \cos kl)} \quad (8)$$

식 (8)의 분모가 0인 경우가 고유진동 특성방정식이다.

### 3. 반경방향 진동 특성

원판 링형 압전변환기에서 반경방향 진동의 지배방정식은 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

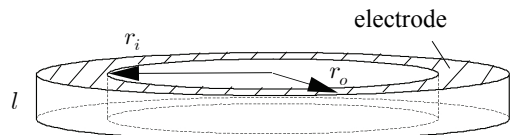


Fig. 1 Diagram of a piezoelectric hollow-disk transducer

† 정희원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과

E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : 02-820-0662, Fax : 02-820-0668

\* 정희원, 숭실대학교 대학원 기계공학과

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (9)$$

여기서  $c (= [c_{11}^p/\rho]^{1/2})$ 는 파동의 전파속도이고  $c_{11}^p (= c_{11} - c_{13}^2/c_{33})$ 은 수정된 탄성계수이다. 변수 분리한 운동 변위는 다음과 같다.

$$u(r, z, t) = U(r)Z(z)e^{j\omega t} \quad (10)$$

변환기의 원주면이 자유로운 경우 반경방향 경계 조건을 다음과 같이 설정한다.

$$r = r_i \text{에서} \quad \sigma_r(r_i) = 0 \quad (11)$$

$$r = r_o \text{에서} \quad \sigma_r(r_o) = 0 \quad (12)$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하면  $U(r)$ 에 대한 운동 방정식을 얻는다. 경계조건 (11)~(12)를 적용하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$U(r) = \frac{J_1(kr)D(r_i) - Y_1(kr)G(r_i)}{D(r_i)} A \quad (13)$$

$$G(r_i) = c_{11}^p \left[ kY_0(kr_i) - \frac{Y_1(kr_i)}{r_i} \right] + c_{12}^p \frac{Y_1(kr_i)}{r_i}$$

$$H(r_i) = c_{11}^p \left[ kJ_0(kr_i) - \frac{J_1(kr_i)}{r_i} \right] + c_{12}^p \frac{J_1(kr_i)}{r_i}$$

여기서  $J$ 는 제1종,  $Y$ 는 제2종 베셀함수이다.

운동방정식의 해를 구하는 과정에서 특성방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$F(k) = H(r_i)G(r_o) - G(r_i)H(r_o) \quad (14)$$

본 논문의 계산에 사용되는 원판 링형 압전변환기는 바깥 반지름이 15 mm이고 안쪽 반지름이 7.5 mm이며 두께가 5 mm이고, 재질은 PZT4이다. 특성방정식에서 구해진  $k$ 와 진동수  $f (= \omega/2\pi)$ 는 다음 관계가 있다.

$$f = \frac{kc}{2\pi} \quad (15)$$

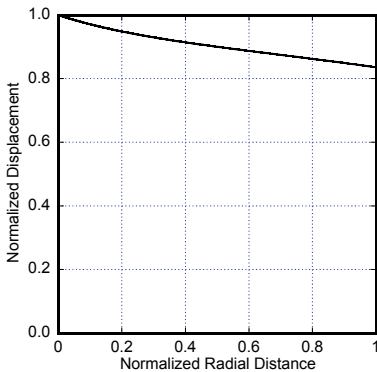


Fig. 2 Vibration displacement distribution

식 (15)에 의하여 고유진동수를 구하면  $f = 48.4$  kHz이다.

식 (14)와 (15)에 의해 구해진 고유진동수를 이용하여 진동모드를 구하여 Fig. 2에 나타냈다. 횡축인 반경방향 위치  $r$ 는  $\tilde{r} [(r-r_i)/(r_o-r_i)]$ , 종축인 진동 변위 진폭  $U$ 는  $\tilde{U} (= U/U_{\max})$ 로 무차원화 하였다. 그림에서 알 수 있듯이 반경 방향의 진동 변위 진폭은 안쪽에서 바깥쪽으로 갈수록 점차 작아진다.

## 4. 결 론

본 논문은 원판 링형 압전변환기의 반경방향 및 두께방향 복합진동 특성을 이론적으로 해석하였다. 반경방향과 두께방향 진동에서 운동방정식과 경계조건을 적용하여, 고유진동수 및 진동모드를 구하였다. 두 방향에서의 진동 특성을 모두 구하여 복합진동할 때의 진동 특성을 파악하였다.

## 후 기

본 연구는 미래창조과학부 및 정보통신산업진흥원의 "IT융합 고급인력과정 지원사업"의 지원으로 수행되었음 (NIPA-2013-H0401-13-1004).

## 참 고 문 헌

- (1) Busch-Vishniac, I. J., 1999, *Electro-Mechanical Sensors and Actuators*, Springer, New York, Chapter 5.
- (2) Kim, J. O., Kim, D. J., 2013, *Piezoelectric Stack Transducer*, Korea Patent Application.
- (3) Oh, S. H., Kim, J. O., 2012, *Coupled Vibration Characteristics of Piezoelectric Disk Transducers*, Proceedings of the KSNVE Fall Conference, pp. 663~664.
- (4) Piao, C., Kim, J. O., 2013, *Radial Vibration Characteristics of Piezoelectric Ring-type Transducers*, Proceedings of the Spring Conference of KSME IT Convergence Division, pp. 83~84.
- (5) Achencach, J. D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North Holland, Chapter 2.