한국소음진동공학회 2013년 추계학술대회논문집, pp. 658~663

음향 공동의 고정밀도 고유치 해석을 위한 새로운 MNDIF 법 정식 개발

New Formulation of MNDIF Method for Eigenvalue Analysis of Acoustic Cavities

강상욱†

S. W. Kang

Key Words: acoustic cavity(음향 공동), eigenvalue(고유치), MNDIF method(개선된 무차원 동영향 함수법), NDIF(무차원 동영향 함수법)

ABSTRACT

A new formulation of the MNDIF method is introduced to extract highly accurate eigenvalues of concave acoustic cavities with arbitrary shapes. It is said that the MNDIF method cannot yield accurate eigenvalues for concave cavities. To overcome this weak point, a new approach of dividing a concave cavity into two convex domains is proposed. The validity of the proposed method is shown through a case study.

1. 서 론

본 논문의 저자는 임의 형상 음향 공동의 고유치와 고유모드를 정확히 구하기 위한 방법으로 NDIF 법(Non-dimensional Dynamic Influence Function Method)을 2000 년 처음으로 개발하였다[1]. 그리고 최근에 오목 형상 음향 공동에 대해서 해의 정밀도가 많이 떨어지는 NDIF 법의 단점을 극복하기 위해, 분할영역법 기반 NDIF 법을 새로이 제안하였다[2].

NDIF 법은 유한요소법[3]과 경계요소법[4]에 비해 해의 정밀도 면에서 탁월한 우수성을 가지고 있음이 저자의 선행 연구에서 증명되었다[1, 2]. 그러나, NDIF 법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 최종 시스템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되는 단점을 가진다. 결과적으로 최종 시스템 행렬식은 대수 고유치 문제(algebra eigenvalue problem)의 형태를 가지지 못하게 되어서, 시스템 행렬로부터 고유치와 고유모드를 추출하는 과정이 매우 번거롭게 된다[1, 2].

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : (02) 760-4228, Fax : (02) 760-4329

저자는 이러한 문제점을 해결하기 위해, 최근에 기존 NDIF 법 이론을 개선하여 임의 형상 음향 공동의 고유치와 고유모드를 수월하게 추출할 수 있는 새로운 NDIF 법인 MNDIF 법을 개발하였다[5]. 그러나 새로이 개발된 MNDIF 법은 볼록 형상의 음향 공동에만 적용 가능한 한계를 가지고 있다. 본 논문에서는 볼록 형상 음향 공동에 대한 MNDIF 법 연구 결과[5]와 오목 형상 평판에 대한 MNDIF 법 연구 결과[6]를 응용/확장하여 오목 형상 음향 공동의 고정밀도 고유치를 효율적으로 구할 수 있는 새로운 MNDIF 법 정식을 정립하고자 한다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계 조건

Fig. 1 에서 실선은 강체벽(rigid wall) 경계조건을 가진 2 차원 음향 공동의 경계(Γ)를 보여준다. 음향 공동의 지배방정식은 식(1)과 같은 헤름홀츠 방정식(Helmholtz equation)으로 나타내어진다[1].

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + \Lambda^2 p(\mathbf{r}) = 0, \qquad (1)$$

여기서 $\mathbf{r}$ 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에 대한 위치벡터를 의미하고(Fig. 1 참조), $p(\mathbf{r})$ 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에서의 음압(sound pressure)을 나

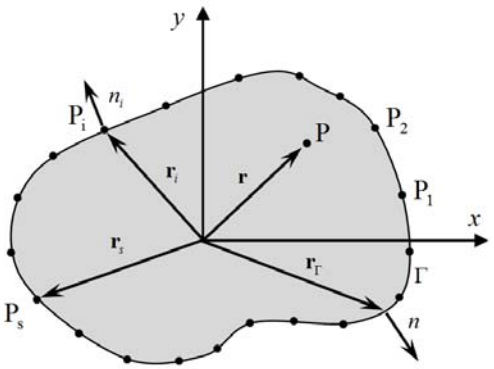

Fig. 1 Arbitrarily shaped, 2-D acoustic cavity discretized with boundary nodes $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_N$.

타내며, Λ 는 주파수 파라미터이다. 그리고 강체벽 음향 공동의 경계 Γ 에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_\Gamma)}{\partial n} = 0 , \qquad (2)$$

여기서 $\mathbf{r}_\Gamma$ 는 음향 공동의 경계 상의 한 점에 대한 위치벡터이며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다.

2.2 영역 분할 및 경계조건 적용

Fig. 2는 오목 형상을 가진 해석 대상 음향 공동을 보여 준다. 기존 MNDIF법[5]은 이러한 오목 형상에 대해서는 정확한 해를 제공하지 않기 때문에, 본 논문에서는 이러한 오목 형상 음향 공동을 2개의 볼록 영역 D_I 과 D_{II} 로 분할하여 각각의 영역에 대해 MNDIF법을 적용하는 방안을 시도한다. 영역 D_I 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 는 각각 노드 $P_1^{(I)}, P_2^{(I)}, \cdots, P_{N_1}^{(I)}$ 와 $P_1^{(a)}, P_2^{(a)}, \cdots, P_{N_a}^{(a)}$ 로 이산화된 후, 영역 D_I 의 내부 한 점에서의 음압은 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정된다[1].

$$p_I(\mathbf{r}^{(I)}) = \sum_{s=1}^{N_1} A_s J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) , \qquad (3)$$

여기서 J_0 는 제 1 종 0 차 베셀 함수를 나타내며, A_s 와 $A_k^{(a)}$ 는 기여도 계수이다. 그리고 $\mathbf{r}^{(I)}$ 는 영역 D_I 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내며, $\mathbf{r}_s^{(I)}$ 와 $\mathbf{r}_k^{(a)}$ 는 경계 Γ_1 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터와 접경 Γ_a 에 위치한 k 번째 노드에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다. 참고로 N_1 과 N_a 는 영역 D_I 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 위에 놓여진 노드의 개수를 각각 나타낸다.

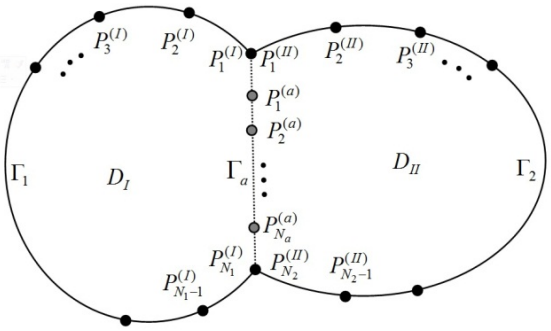

Fig. 2 Concave acoustic cavity divided with 2 convex domains

가정된 음압 식(3)은 지배방정식 식(1)을 만족하므로, 경계조건 식(2)를 식(3)에 적용하는 방법에 의해 음압을 구하고자 한다. 영역 D_I 의 경계 Γ_1 은 경계조건 식(2)를 만족해야 하므로, 경계 Γ_1 위에 놓인 노드들은 다음과 같은 강체벽 경계 조건을 만족한다.

$$\partial p_I(\mathbf{r}_i^{(I)}) / \partial n_i^{(I)} = 0 \ , \ i = 1, 2, \cdots, N_1 , \qquad (4)$$

여기서 $\mathbf{r}_i^{(I)}$ 와 $n_i^{(I)}$ 는 경계 Γ_1 위의 i 번째 노드의 위치벡터와 법선 방향을 각각 의미한다.

음압 식(3)을 경계 조건 식(4)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1} A_s \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) = 0 , \quad i = 1, 2, \cdots, N_1 . \qquad (5)$$

식(5)에 있는 법선 방향 미분을 수행하면,

$$\sum_{s=1}^{N_1} A_s \Lambda J_1(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|) \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right| + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} \Lambda J_1(\Lambda \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} \left| \mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right| = 0 . \qquad (6)$$

이제 식(6)에 있는 베셀 함수 J_1 에서 주파수 파라미터 Λ 를 분리해내기 위해, 베셀 함수는 다음과 같이 M 개의 테일러 급수 전개[7]에 의해 근사화 된다.

$$J_1(\Lambda|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_s^{(I)}|)\approx\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j(\Lambda|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_s^{(I)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}=\sum_{j=0}^{M}\Lambda^{1+2j}\varphi_j^{(I)}(i,s) \quad (7)$$

$$J_1(\Lambda|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_k^{(a)}|)\approx\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j(\Lambda|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_k^{(a)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}=\sum_{j=0}^{M}\Lambda^{1+2j}\varphi_j^{(Ia)}(i,k) \quad (8)$$

여기서 $\varphi_j^{(I)}(i,s)$ 와 $\varphi_j^{(Ia)}(i,k)$ 는 다음과 같다.

$$\varphi_j^{(I)}(i,s)=\frac{(-1)^j(|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_s^{(I)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}, \quad (9)$$

$$\varphi_j^{(Ia)}(i,k)=\frac{(-1)^j(|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_k^{(a)}|/2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}. \quad (10)$$

식(7)과 식(8)을 식(6)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1}A_s\Lambda\sum_{j=0}^{M}\Lambda^{1+2j}\varphi_j^{(I)}(i,s)\frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}}|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_s^{(I)}| + \sum_{k=1}^{N_a}A_k^{(a)}\Lambda\sum_{j=0}^{M}\Lambda^{1+2j}\varphi_j^{(Ia)}(i,k)\frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}}|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_k^{(a)}|=0 \quad (11)$$

$$i=1,2,\cdots,N_1.$$

식(11)에서 서메이션(summation) 기호의 순서를 바꾸어서 다음과 같이 정리한다.

$$\sum_{j=0}^{M}\Lambda^{2(1+j)}\sum_{s=1}^{N_1}A_s\varphi_j^{(I)}(i,s)\frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}}|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_s^{(I)}| + \sum_{j=0}^{M}\Lambda^{2(1+j)}\sum_{k=1}^{N_a}A_k^{(a)}\varphi_j^{(Ia)}(i,k)\frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}}|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_k^{(a)}|=0 \quad (12)$$

$$i=1,2,\cdots,N_1.$$

식(12)를 한번 더 간단히 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{j=0}^{M}\lambda^{(1+j)}\sum_{s=1}^{N_1}A_s\psi_j^{(I)}(i,s) + \sum_{j=0}^{M}\lambda^{(1+j)}\sum_{k=1}^{N_a}A_k^{(a)}\psi_j^{(Ia)}(i,k)=0 \quad (13)$$

$$i=1,2,\cdots,N_1.$$

여기서 $\lambda=\Lambda^2$ 이며 $\psi_j^{(I)}(i,s)$ 와 $\psi_j^{(Ia)}(i,k)$ 는 다음과 같다.

$$\psi_j^{(I)}(i,s)=\varphi_j^{(I)}(i,s)\frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}}|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_s^{(I)}|, \quad (14)$$

$$\psi_j^{(Ia)}(i,k)=\varphi_j^{(Ia)}(i,k)\frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}}|\mathbf{r}_i^{(I)}-\mathbf{r}_k^{(a)}|. \quad (15)$$

식(13)에서 λ 를 맨 앞으로 묶어내면,

$$\lambda[\sum_{j=0}^{M}\lambda^j\sum_{s=1}^{N_1}A_s\psi_j^{(I)}(i,s) + \sum_{j=0}^{M}\lambda^j\sum_{k=1}^{N_a}A_k^{(a)}\psi_j^{(Ia)}(i,k)]=0 \quad (16)$$

$$i=1,2,\cdots,N_1.$$

다음으로, 식(16)에서 맨 앞의 λ 를 소거한 후, λ 에 대한 다항식의 형태로 다음과 같이 재배치한다.

$$\lambda^0\sum_{s=1}^{N_1}A_s\psi_0^{(I)}(i,s)+\lambda^1\sum_{s=1}^{N_1}A_s\psi_1^{(I)}(i,s)+\cdots+\lambda^M\sum_{k=1}^{N_1}A_s\psi_M^{(I)}(i,s) + \lambda^0\sum_{k=1}^{N_a}A_k^{(a)}\psi_0^{(Ia)}(i,k)+\lambda^1\sum_{k=1}^{N_a}A_k^{(a)}\psi_1^{(Ia)}(i,k)+\cdots+\lambda^M\sum_{k=1}^{N_a}A_k^{(a)}\psi_M^{(Ia)}(i,k)=0 \quad (17)$$

$$i=1,2,\cdots,N_1.$$

마지막으로, 식(17)을 행렬식의 형태로 표현하면, 영역 D_I 에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0\mathbf{\Psi}_0^{(I)}+\lambda^1\mathbf{\Psi}_1^{(I)}+\cdots+\lambda^M\mathbf{\Psi}_M^{(I)})\mathbf{A} + (\lambda^0\mathbf{\Psi}_0^{(Ia)}+\lambda^1\mathbf{\Psi}_1^{(Ia)}+\cdots+\lambda^M\mathbf{\Psi}_M^{(Ia)})\mathbf{A}^{(a)}=\mathbf{0} \quad (18)$$

여기서, 크기 $N_1\times N_1$ 인 행렬 $\mathbf{\Psi}_j^{(I)}$ 의 i 번째 행과 s 번째 열에 위치한 성분은 식(14)에 의해 주어지며, 크기 $N_1\times N_a$ 인 행렬 $\mathbf{\Psi}_j^{(Ia)}$ 의 i 번째 행과 k 번째 열에 위치한 성분은 식(15)에 의해 주어진다. 그리고 식(18)에서 기여도 벡터 $\mathbf{A}$ 와 $\mathbf{A}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{A}=\{A_1\quad A_2\quad\cdots\quad A_{N_1}\}^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{A}^{(a)}=\{A_1^{(a)}\quad A_2^{(a)}\quad\cdots\quad A_{N_a}^{(a)}\}^T, \quad (20)$$

여기서 $\{...\}^T$ 는 전치 행렬(transpose matrix)을 의미한다.

마찬가지 방법으로, 영역 D_{II} 의 내부 한 점에서의 음압을 경계 Γ_2 과 접경 Γ_a 에 놓인 노드들에 대한 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 식(21)과 같이 가정한다.

$$p_{II}(\mathbf{r}^{(II)}) = \sum_{s=1}^{N_2} B_s\, J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right|) + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)}\, J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \quad (21)$$

여기서 B_s 와 $B_k^{(a)}$ 는 기여도 계수이며, $\mathbf{r}^{(II)}$ 는 영역 D_{II} 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내고 $\mathbf{r}_s^{(II)}$ 는 경계 Γ_2 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터를 나타낸다. 참고로 N_2 는 영역 D_{II} 의 경계 Γ_2 위에 놓여진 노드의 개수를 나타낸다. 다음으로 경계 Γ_2 에 놓인 노드들에서의 음압은 식(22)와 같은 강체벽 경계조건을 만족한다.

$$\partial p_{II}(\mathbf{r}_i^{(II)}) / \partial n_i^{(II)} = 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, N_2\,, \quad (22)$$

여기서 $\mathbf{r}_i^{(II)}$ 와 $n_i^{(II)}$ 는 경계 Γ_2 위의 i 번째 노드의 위치벡터와 법선 방향을 각각 의미한다.

식(21)을 식(22)에 대입한 후, 영역 D_I 에 대해 수행한 식(5~20)의 과정을 수행하면, 영역 D_{II} 에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\lambda^0 \mathbf{\Psi}_0^{(II)} + \lambda^1 \mathbf{\Psi}_1^{(II)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Psi}_M^{(II)})\mathbf{B} + (\lambda^0 \mathbf{\Psi}_0^{(IIa)} + \lambda^1 \mathbf{\Psi}_1^{(IIa)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Psi}_M^{(IIa)})\mathbf{B}^{(a)} = \mathbf{0} \quad (23)$$

여기서 행렬 $\mathbf{\Psi}_j^{(II)}$ 와 $\mathbf{\Psi}_j^{(IIa)}$ 의 크기는 각각 $N_2 \times N_2$ 와 $N_2 \times N_a$ 이고, 이들 행렬의 성분은 식(24)과 식(25)에 의해 각각 주어지며,

$$\psi_j^{(II)}(i,s) = \varphi_j^{(II)}(i,s) \frac{\partial}{\partial n_i^{(II)}} \left| \mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right|, \quad (24)$$

$$\psi_j^{(IIa)}(i,k) = \varphi_j^{(IIa)}(i,k) \frac{\partial}{\partial n_i^{(II)}} \left| \mathbf{r}_i^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|, \quad (25)$$

여기서 $\varphi_j^{(II)}(i,s)$ 와 $\varphi_j^{(IIa)}(i,k)$ 는 식(9, 10)에 의해 각각 주어진다. 기여도 벡터 $\mathbf{B}$ 와 $\mathbf{B}^{(a)}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \{B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_{N_2}\}^T\,, \quad (26)$$

$$\mathbf{B}^{(a)} = \{B_1^{(a)} \quad B_2^{(a)} \quad \cdots \quad B_{N_a}^{(a)}\}^T\,. \quad (27)$$

2.3 접경에서의 연속 조건 적용

영역 D_I 와 D_{II} 의 접경 Γ_a 에서 음압과 음압의 기울기가 같다는 연속 조건[8]을 고려한다. 접경 Γ_a 에 위치한 노드들에서의 음압 연속 조건과 음압의 기울기 연속 조건은 식(28, 29)와 같이 각각 표현될 수 있다.

$$p_I(\mathbf{r}_i^{(a)}) = p_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)})\,, \quad i = 1, 2, \cdots, N_a\,, \quad (28)$$

$$\frac{\partial p_I(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i^{(a)}} = \frac{\partial p_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)})}{\partial n_i^{(a)}}\,, \quad i = 1, 2, \cdots, N_a\,, \quad (29)$$

여기서 $n_i^{(a)}$ 는 접경 위에 놓인 i 번째 노드의 법선 방향을 의미한다.

이제 두 영역에서의 음압 식(3)과 식(21)을 변위 연속 조건 식(28)에 대입한 후, 영역 D_I 에 대해 수행한 식(5~20)의 과정을 수행하면, 음압 연속 조건에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&(\lambda^0 \mathbf{\Phi}_0^{(aI)} + \lambda^1 \mathbf{\Phi}_1^{(aI)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Phi}_M^{(aI)})\mathbf{A} \\ &\quad + (\lambda^0 \mathbf{\Phi}_0^{(a)} + \lambda^1 \mathbf{\Phi}_1^{(a)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Phi}_M^{(a)})\mathbf{A}^{(a)} \\ &= (\lambda^0 \mathbf{\Phi}_0^{(aII)} + \lambda^1 \mathbf{\Phi}_1^{(aII)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Phi}_M^{(aII)})\mathbf{B} \\ &\quad + (\lambda^0 \mathbf{\Phi}_0^{(a)} + \lambda^1 \mathbf{\Phi}_1^{(a)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Phi}_M^{(a)})\mathbf{B}^{(a)}\end{aligned} \quad (30)$$

여기서 행렬 $\mathbf{\Phi}_j^{(aI)}$, $\mathbf{\Phi}_j^{(a)}$, $\mathbf{\Phi}_j^{(aII)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1$, $N_a \times N_a$, $N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분 $\phi_j^{(aI)}(i,s)$, $\phi_j^{(a)}(i,k)$, $\phi_j^{(aII)}(i,s)$ 는 식(31~33)에 의해 각각 주어진다.

$$\phi_j^{(aI)}(i,s) = \frac{(-1)^j (\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right| / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}\,, \quad (31)$$

$$\phi_j^{(a)}(i,k) = \frac{(-1)^j (\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right| / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}\,, \quad (32)$$

$$\phi_j^{(aII)}(i,s) = \frac{(-1)^j (\left| \mathbf{r}_i^{(a)} - \mathbf{r}_s^{(II)} \right| / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}\,. \quad (33)$$

다음으로 두 영역의 음압 식(3)과 식(21)을 기울기 연속 조건 식(29)에 대입한 후, 영역 D_I 에 대해 수행한 식(5~20)의 과정을 수행하면, 음압 기울기 연속 조건에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&(\lambda^0 \mathbf{\Psi}_0^{(aI)} + \lambda^1 \mathbf{\Psi}_1^{(aI)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Psi}_M^{(aI)})\mathbf{A} \\ &\quad + (\lambda^0 \mathbf{\Psi}_0^{(a)} + \lambda^1 \mathbf{\Psi}_1^{(a)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Psi}_M^{(a)})\mathbf{A}^{(a)} \\ &= (\lambda^0 \mathbf{\Psi}_0^{(aII)} + \lambda^1 \mathbf{\Psi}_1^{(aII)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Psi}_M^{(aII)})\mathbf{B} \\ &\quad + (\lambda^0 \mathbf{\Psi}_0^{(a)} + \lambda^1 \mathbf{\Psi}_1^{(a)} + \cdots + \lambda^M\ \mathbf{\Psi}_M^{(a)})\mathbf{B}^{(a)}\end{aligned} \quad (34)$$

여기서 $\mathbf{\Psi}_j^{(aI)}$, $\mathbf{\Psi}_j^{(a)}$, $\mathbf{\Psi}_j^{(aII)}$ 의 크기는 각각 $N_a \times N_1$, $N_a \times N_a$, $N_a \times N_2$ 이고, 이들 행렬의 성분 $\psi_j^{(aI)}(i,s)$, $\psi_j^{(a)}(i,k)$, $\psi_j^{(aII)}(i,s)$ 는 식(35~37)에 의해 각각 주어진다.

$$\psi_j^{(aI)}(i,s)=\frac{(-1)^j\left(\left|\mathbf{r}_i^{(a)}-\mathbf{r}_s^{(I)}\right|/2\right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}\frac{\partial\left|\mathbf{r}_i^{(a)}-\mathbf{r}_s^{(I)}\right|}{\partial n_i}, \quad (35)$$

$$\psi_j^{(a)}(i,k)=\frac{(-1)^j\left(\left|\mathbf{r}_i^{(a)}-\mathbf{r}_k^{(a)}\right|/2\right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}\frac{\partial\left|\mathbf{r}_i^{(a)}-\mathbf{r}_k^{(a)}\right|}{\partial n_i}, \quad (36)$$

$$\psi_j^{(aII)}(i,s)=\frac{(-1)^j\left(\left|\mathbf{r}_i^{(a)}-\mathbf{r}_s^{(II)}\right|/2\right)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}\frac{\partial\left|\mathbf{r}_i^{(a)}-\mathbf{r}_s^{(II)}\right|}{\partial n_i}. \quad (37)$$

2.4 고유치 문제로의 정식화

2.2 절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식(18)와 식(23) 및 2.3 절에서 추출한 두 시스템 행렬식 식(30)과 식(34)를 모두 연립하여 하나의 행렬식으로 나타내면, 다음과 같은 고차 다항 고유치 문제 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\lambda^0\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_0^{(I)} & \boldsymbol{\Psi}_0^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_0^{(II)} & \boldsymbol{\Psi}_0^{(IIa)}\\ \boldsymbol{\Phi}_0^{(aI)} & \boldsymbol{\Phi}_0^{(a)} & -\boldsymbol{\Phi}_0^{(aII)} & -\boldsymbol{\Phi}_0^{(a)}\\ \boldsymbol{\Psi}_0^{(aI)} & \boldsymbol{\Psi}_0^{(a)} & -\boldsymbol{\Psi}_0^{(aII)} & -\boldsymbol{\Psi}_0^{(a)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{A}^{(a)}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^{(a)}\end{Bmatrix}$$

$$+\lambda^1\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_1^{(I)} & \boldsymbol{\Psi}_1^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_1^{(II)} & \boldsymbol{\Psi}_1^{(IIa)}\\ \boldsymbol{\Phi}_1^{(aI)} & \boldsymbol{\Phi}_1^{(a)} & -\boldsymbol{\Phi}_1^{(aII)} & -\boldsymbol{\Phi}_1^{(a)}\\ \boldsymbol{\Psi}_1^{(aI)} & \boldsymbol{\Psi}_1^{(a)} & -\boldsymbol{\Psi}_1^{(aII)} & -\boldsymbol{\Psi}_1^{(a)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{A}^{(a)}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^{(a)}\end{Bmatrix} \quad (38)$$

$$+\cdots$$

$$+\lambda^M\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_M^{(I)} & \boldsymbol{\Psi}_M^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_M^{(II)} & \boldsymbol{\Psi}_M^{(IIa)}\\ \boldsymbol{\Phi}_M^{(aI)} & \boldsymbol{\Phi}_M^{(a)} & -\boldsymbol{\Phi}_M^{(aII)} & -\boldsymbol{\Phi}_M^{(a)}\\ \boldsymbol{\Psi}_M^{(aI)} & \boldsymbol{\Psi}_M^{(a)} & -\boldsymbol{\Psi}_M^{(aII)} & -\boldsymbol{\Psi}_M^{(a)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{A}^{(a)}\\ \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^{(a)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}$$

다음으로, 위 식을 다음과 같이 간단한 형태로 표현한다.

$$\lambda^0\mathbf{SM}_1\,\mathbf{C}+\lambda^1\,\mathbf{SM}_1\,\mathbf{C}+\cdots+\lambda^M\,\mathbf{SM}_M\,\mathbf{C}=\mathbf{0}, \quad (39)$$

여기서

$$\mathbf{SM}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_j^{(I)} & \boldsymbol{\Psi}_j^{(Ia)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_j^{(II)} & \boldsymbol{\Psi}_j^{(IIa)}\\ \boldsymbol{\Phi}_j^{(aI)} & \boldsymbol{\Phi}_j^{(a)} & -\boldsymbol{\Phi}_j^{(aII)} & -\boldsymbol{\Phi}_j^{(a)}\\ \boldsymbol{\Psi}_j^{(aI)} & \boldsymbol{\Psi}_j^{(a)} & -\boldsymbol{\Psi}_j^{(aII)} & -\boldsymbol{\Psi}_j^{(a)}\end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{C}=\left\{\mathbf{A}\quad\mathbf{A}^{(a)}\quad\mathbf{B}\quad\mathbf{B}^{(a)}\right\}^T. \quad (41)$$

λ 에 대한 고차 다항 행렬식 식(39)는 다음과 같이 선형화될 수 있다[9].

$$\mathbf{SM}_L\,\mathbf{D}=\lambda\,\mathbf{SM}_R\,\mathbf{D}, \quad (42)$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}_L$ 과 $\mathbf{SM}_R$ 그리고 기여도 벡터 $\mathbf{D}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_L=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I}\\ -\mathbf{SM}_0 & -\mathbf{SM}_1 & -\mathbf{SM}_2 & \cdots & -\mathbf{SM}_{M-1}\end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\mathbf{SM}_R=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_M\end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\mathbf{D}=\left\{\mathbf{C}^T\quad\lambda\mathbf{C}^T\quad\lambda^2\mathbf{C}^T\quad\cdots\quad\lambda^{M-1}\mathbf{C}^T\right\}. \quad (45)$$

마지막으로 식(42)는 다음과 같이 변경된다.

$$\mathbf{SM}_R^{-1}\,\mathbf{SM}_L\,\mathbf{D}=\lambda\,\mathbf{D}. \quad (46)$$

식(46)을 다시 작성하면, 다음과 같이 대수 고유치 문제로 정식화된 최종 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}\,\mathbf{D}=\lambda\,\mathbf{D}, \quad (47)$$

여기서

$$\mathbf{SM}=\mathbf{SM}_R^{-1}\,\mathbf{SM}_L. \quad (48)$$

식(47)의 고유치 문제를 푸는 방법에 의해 구한 고유치 λ 를 $\Lambda=\sqrt{\lambda}$ 에 대입하여 Λ 를 계산하는 방식에 의해 음향 공동의 고유치를 구할 수 있다.

3. 검증 예제

본 논문에서 제안된 방법의 타당성 및 정확성을 검증하기 위해, 엄밀해가 존재하는 직사각형 2 차원 음향 공동(가로 1.2m, 세로 0.9m)을 Fig. 3 과 같이 두 영역으로 분할한 후, 두 영역의 경계 및 접경에 총 25 개의 노드($N_1=N_2=11$, $N_a=3$)를 배치하여 해석을 수행하였다. 그 결과는 Table 1 에 제시되었다..

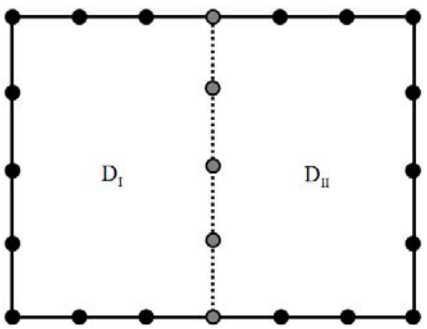

Fig. 3 Rectangular acoustic cavity divided with 2 domains

Table 1 Eigenvalues of the rectangular acoustic cavity by the proposed method, the exact solution, and FEM (parenthesized values denote errors (%) with respect to the values by the exact solution).

	proposed method (25 nodes, $M=15$)	exact solution[8]	FEM(ANSYS) (2500 nodes)
1	2.618 (0.00)	2.618	2.618 (0.00)
2	3.491 (0.00)	3.491	3.492 (0.03)
3	4.363 (0.00)	4.363	4.364 (0.02)
4	5.236 (0.00)	5.236	5.238 (0.04)
5	6.293 (0.00)	6.293	6.295(0.03)
6	6.978 (0.04)	6.981	6.989(0.11)

Table 1 에서 본 논문에서 제안된 방법(proposed method)에 의해 구해진 고유치들은 엄밀해(exact solution)와 아주 잘 일치함을 확인할 수 있다. 첫 번째부터 다섯 번째 고유치 까지는 엄밀해와 오차 없이 완전히 일치함을 확인할 수 있으며, 여섯 번째 고유치의 경우 0.04%의 매우 작은 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 참고로 여섯 번째 고유치에 대한 이러한 오차는 노드 수를 증가시킬 경우 더 작아짐을 확인하였다. 반면에, 2500 개의 많은 노드를 사용한 FEM(ANSYS) 해석 결과는 제안된 방법에 비해 더 큰 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 결과적으로 본 논문에서 제안된 방법은 FEM 에 비해 적은 노드(적은 수치 해석 계산 량)를 사용함에도 불구하고 엄밀해와 거의 오차가 없는 매우 정밀한 고유치 해석 결과를 제공한다고 결론 지을 수 있다.

4. 결 론

오목 형상 음향 공동에 대해 정밀한 해를 제공하지 못하는 MNDIF법의 문제점을 극복할 수 있는 분할영역법에 근거한 새로운 MNDIF법 정식이 본 논문에서 정립되었다. 정립된 정식의 타당성은 예제 검증을 통해 확인되었다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(2012R1A1A2044327).

참 고 문 헌

(1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Eigenmode analysis of arbitrarily shaped two-dimensional cavities by the method of point-matching, Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.

(2) Kang, S. W. and J, I. Yon., 2012, Development of a Modified NDIF method for extracting highly accurate eigenvalues of arbitrarily shaped acoustic cavities, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 22, No. 8, pp. 742-747.

(3) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.

(4) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New York.

(5) Kang, S. W. and J, I. Yon., 2011, Development of an improved NDIF method for efficiently extracting eigenvalues and eigenmodes of arbitrarily shaped acoustic cavities, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 21, No. 10, pp. 960-966.

(6) Kang, S. W. and J, I. Yon., 2013, New formulation of MNDIF method for extracting accurate natural frequencies of plates, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 23, No. 8, pp. 725-733.

(7) Spiegel, M. R., 1983, Advanced Mathematics, McGraw-Hill, Inc, Singapore.

(8) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Litton Educational Publishing, New York.

(9) Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., 1982, Matrix Polynomials, Academic Press, New York.