

# 동하중을 받는 구조물의 등가정하중 기반 구조최적화 연구

## Structural Optimization based on Equivalent Static Load

### for Structure under Dynamic Load

김현기† · 김의영\* · 조맹효\*\*

Hyun Gi Kim, Eui young Kim and Maenghyo Cho

**Key Words** : Equivalent Static Load(등가정하중), Dynamic Load(동하중), Primary Degrees of Freedom(주자유도), Reduction Model(축소모델)

#### ABSTRACT

Due to difficulty of considering dynamic load in side of a computer resource and computing time, it is common that external load is assumed as ideal static load. However, structural analysis under static load cannot guarantee the safety of structural design. Recently, the systematic method to construct equivalent static load from the given dynamic load has been proposed. Previous study has calculated equivalent static load through the optimization procedure under displacement constraints. And previously reported works to distribute equivalent static load were based on ad hoc methods. However, it is appropriate to take into account the stress constraint for the safety design. Moreover, the improper selection of loading position may results in unreliable structural design. The present study proposes the methodology to optimize an equivalent static which distributed on the primary DOFs, DOFs of the constraint elements, DOF of an external load as positions. In conclusion, the reliability of proposed method is demonstrated through a global optimization.

#### 1. 서 론

대부분의 구조물에는 동하중이 작용한다. 그러나, 해석의 편의상 이상적인 정하중으로 가정하여 구조 해석 또는 최적화를 수행하는데, 이런 방법은 구조물의 안전성 측면에서 충분한 신뢰를 줄 수 없다. 반면, 동하중을 고려하게 되면 지나치게 많은 하중을 고려해야 하기 때문에 계산시간과 전산자원 등 물리적 제약이 많이 따르게 된다. 이러한 문제점을 개선하고자 가중치를 고려하거나 임계시간의 하중을 이용하는 방법, 등가정하중 적용 등의 동하중에 상

응하는 정하중을 사용하여 해석을 수행하는 연구가 진행되어 왔다<sup>(1-3)</sup>. 이 중에서 등가정하중 방법은 보수적인 구속조건을 만족하면서 최적화 과정을 통해 구해지므로 가중치 등을 고려하는 직관적인 방법보다 안전성을 보장하는 해석이라고 할 수 있다. 최근에는 등가정하중 방법의 개선을 위해 축소시스템 구축시 사용되는 주자유도 개념을 도입하여 등가정하중 분포 자유도를 기존보다 공학적인 방법으로 접근하여 최종적으로 산출된 등가정하중의 신뢰성을 검증한 연구가 진행되었다<sup>(4,5)</sup>.

본 연구에서는 주자유도 기반으로 선정된 등가정하중을 사용하여 구조최적화를 수행함으로써 자유도 선정 방법에 대한 신뢰성을 검증하고, 구조최적화로 적용 가능성을 타진해 보고자 한다.

본 논문구성은 2장에서는 등가정하중 분포를 위해 선정되는 자유도 구성방법과 등가응력을 구속조

† 교신저자; 정회원, 한국항공우주연구원

E-mail : shotgun1@kari.re.kr

Tel : 042-870-3531, Fax : 042-860-2006

\* 서울대학교 기계항공공학부

\*\* 서울대학교 기계항공공학부

건으로 하여 미지의 등가정하중과 연동시키는 유한 요소 정식화 방법을 소개하고, 등가정하중 기반 구조최적화 수행을 위한 조건을 설명하였다. 3장에서는 등가정하중을 적용하여 구조최적화를 수행하였다. 이를 위해 전역최적화 방법으로 많이 사용되는 모의담금(Simulated Annealing)을 사용하여 중량을 최소화 하면서 제한된 구속조건을 만족하는 최적화를 수행하였다.

## 2. 등가정하중 위치 선정 및 최적화

### 2.1 등가정하중 위치 선정

축소모델 구축시 사용되는 자유도는 구조물의 거동을 잘 표현하기 때문에 등가정하중 분포 자유도로 사용하기에 적절하다. 그러나, 단지 주자유도에만 등가정하중을 분포시켜 모든 경우의 거동을 잘 모사하는 데는 한계가 있다. 외부하중이 주자유도가 영향을 받지 않는 위치에 가해지는 경우에는 상대적으로 큰 응력이 발생하여 구속조건으로 사용되는 요소의 거동을 반영해 줄 수 있는 자유도가 추가되어야 하며 이를 위해 구속조건 요소의 자유도들을 등가정하중을 분포시키기 위한 추가적인 자유도에 포함시켰다. 또한, 하중이 직접적으로 부과되는 위치는 해석 초기 하중이 가해지는 주변의 거동을 잘 모사할 필요가 있으므로 이 자유도도 등가정하중 자유도로 포함시켰다. Fig.1은 등가정하중 분포를 위해 선정되는 자유도 조합을 보여주고 있다.

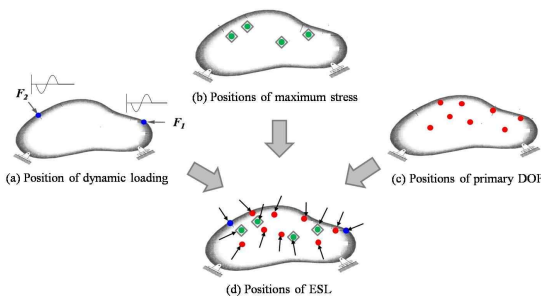


Fig.1 Selection of positions for ESL

### 2.2 등가정하중 최적화

동하중 해석에서 임의의 시간에서의 하중은 식 (1)과 같다.

$$[K_d]\{u\}_t = \{F\}_t \quad (i=1 \sim n) \quad (1)$$

여기서, 'n'은 동하중 해석을 수행하는 총 스텝이다.

변위벡터  $\{u\}$ 는 식 (2)와 같이 변환행렬을 통해 일반화 좌표로 정의될 수 있다.

$$\{u\} = [Q]\{z\} \quad (2)$$

여기서,  $[Q] = [v_1 v_2 v_3 \dots v_n]$ ,  $v_i$ 는  $i^{th}$  고유벡터이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 식 (3)으로 표현된다.

$$[Q]^T [K_d] [Q] \{z\} = [Q]^T \{F\} \quad (3)$$

동하중 해석에서  $p$ 개의 모드를 사용할 경우, 일반화 좌표계  $\{z\}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/w_1^2 & & & \\ & 1/w_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/w_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{p1} & v_{p2} & \dots & v_{pm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서, 'm'은 총 자유도 개수이다.

식 (4)를 식 (2)에 대입하면 각 자유도의 변위는 식 (5)의 행렬 연산을 통해 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{Mp} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{Bmatrix} \quad (5)$$

각 요소의 응력은 식 (5)에서 계산된 요소별 자유도에  $[C]$  행렬을 곱하여 계산된다.

$$\{\sigma\}^i = [C]\{\epsilon\}_e^i = [C][B]\{u\}_e^i \quad (6)$$

여기서,  $\{u\}_e^i$ 는 해당요소 자유도,  $[B] = \partial N_i / \partial x_j$ ,  $N_i$ 는 형상함수,  $\{\sigma\}^i = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}\}^T$ 이다.

동하중 해석 과정에서 매 스텝마다 최대 등가응력이 발생하는 요소가 식별되는데, 여기에서는 선정된 요소의 등가응력을 구속조건으로 하여 최적화 된 등가정하중을 계산하였다. Table 1은 등가정하중 최적화 수행 조건이다. 등가정하중이 최대 등가응력  $c_i$ 보다 큰 응력을 산출하도록 하면서 지나치게 큰 하중이 구해지지 않도록 가중치  $w$ 를 1.2~1.5 범위로 하여 설정하였다.

Table 1 Condition of optimization for ESL

- Obj. Fn. :  $\min. f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2$
- Constraint :  $c_i \leq \sigma_{eq}^i(f_1, f_2, \dots, f_n) \leq w_i c_i$

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ w_i = 1.2 \sim 1.5 \end{cases}$$

### 3. 수치예제

#### 3.1 등가정하중 최적화

Fig.2는 동하중이 작용하고 있는 트러스 구조물과 해석조건을 나타내고 있다. 트러스 구조물 상부 끝단 두 지점에 동하중이 작용하고 있으며, 하단부 지점은 고정 경계조건이 부과되었다. 동하중 해석을 위해 10개의 저차모드가 사용되었고, 해석방법은 Newmark 시간적분, 시간스텝은  $1 \times 10^{-4}$  sec.이며 0.2sec.(총 2,000 steps) 까지 해석을 수행하였다.

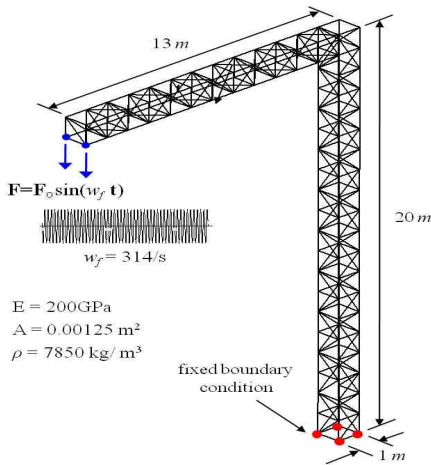


Fig.2 Configuration of a truss structure under dynamic loading and analysis condition

등가정하중을 구하기 위해서는 등가정하중이 만족해야 하는 구속조건을 결정해야 하는데, 본 예제에서는 동하중 해석에서 각 스텝마다 최대응력이 발생하는 요소들의 응력값을 구속조건으로 결정하였다. Fig.3은 최대응력이 발생하는 요소와 최대응력값을 보여주고 있다. 적색으로 구별되어 있는 요소가 각 스텝에서 최대응력이 발생하고 있는 요소로서 총 15개의 요소가 선정되었다. Fig.3에서 영역 A와 영역 B의 응력이 상대적으로 높게 계산되는 것을 알 수 있다. 이 결과를 고려하여 최대응력 발생 요소 중에서 상대적으로 높은 응력을 나타내는 11개 요소의 응력조건을 등가정하중 최적화를 수행할 때 구속조건으로 부과하였다.

결정된 구속조건을 만족시키는 등가정하중을 구하기 위해서는 등가정하중을 분포시키는 위치를 결

정해야 한다. 등가정하중 분포 위치는 Fig.1에서 설명한 세 종류의 위치 그룹으로 구성되며, 그 결과는 Fig.4에 주어져 있다. 해당 위치들은 주자유도, 구속조건 요소 자유도, 외부하중 자유도로 구성되는데, 주자유도 선정기법을 통해 50개 주자유도, 구속조건 요소의 자유도 60개, 외부하중 자유도 2개가 선정되었다. 상호 중복되는 자유도가 있기 때문에 최종적으로 109개의 자유도가 등가정하중 분포 위치로 선정되었다. 구속조건과 등가정하중 분포 위치가 결정되면, Table 2의 최적화를 통해 각 자유도에서의 등가정하중이 산출된다.

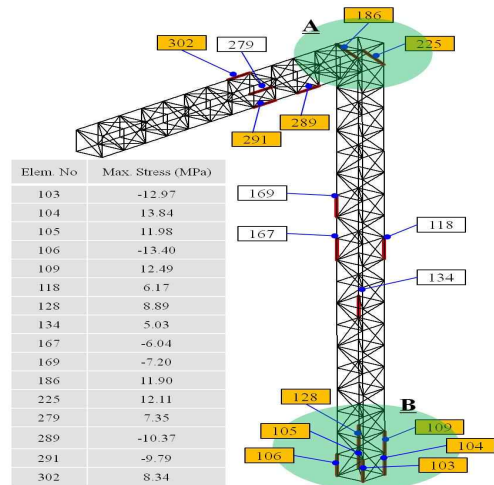


Fig.3 Constraint elements and the maximum stress of each element

Table 2 Condition of optimization for ESL in the truss structure

- Obj. Fn. :  $\min. \sum_{i=1}^{109} f_i^2$
- Constraint  $c_1 : -15.56 \leq \sigma^{103}(f_1, f_2, \dots, f_{109}) \leq -12.97$   
 $c_2 : 13.84 \leq \sigma^{104}(f_1, f_2, \dots, f_{109}) \leq 16.60$   
 $\vdots$   
 $c_{11} : 8.34 \leq \sigma^{302}(f_1, f_2, \dots, f_{109}) \leq 10.08$

Fig.4는 각 절점에서 계산된 등가정하중을 보여주고 있다. 각 등가정하중 크기에 비례하여 화살표 길이를 표기하였으며, 주요 위치에서 구체적인 등가정하중 값을 나타내었다. 등가정하중 계산 결과, 해석 초기 동하중이 부과되는 위치에서 가장 큰 하중값이 계산되었다. 반면, Fig.3에서 상단과 하단의 연결부인 A영역, 고정경계가 부과되는 하단부 B영역에서

는 등가정하중이 상대적으로 작게 계산됨을 알 수 있다. 이것은 상부영역에 작용하는 하중에 의해 구조물 전체에서 굽힘 거동이 발생하게 되는데, 이런 거동의 영향은 물리적 또는 구조적인 형태의 경계조건 지점에 근처에서 커지게 된다. 따라서, 상하부 연결부 하단 경계조건 근처에는 인위적인 하중을 부과하지 않더라도 충분한 응력이 발생하기 때문이다.

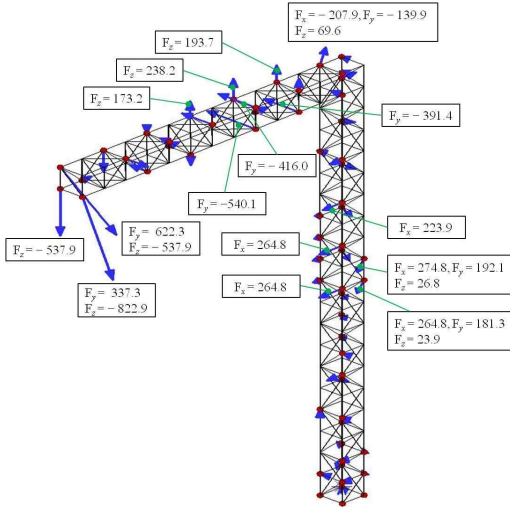


Fig.4 Distribution of ESL(unit : N)

### 3.2 전역 최적화

Fig.4에 나타낸 등가정하중을 적용하여 응력 구속조건을 만족시키면서 구조물 전체 중량을 최소화하는 전역최적화를 수행하였다. 최적화를 위해 모의담금 방법을 적용하였고, 설계변수는 상부영역의 트러스 요소들의 면적으로 설정하였다. 구속조건은 Fig.3에 나타낸 요소들의 응력이 제한값을 초과하지 않도록 하였다. Table 3은 최적화 수행 조건이며,  $n$ 은 총 요소수를 의미한다.

Table 3 Condition of structural optimization

- Obj. Fn. : min.  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  ( $n = 174$ )
- Variable( $m^2$ ):  $A_1, A_2, \dots, A_n$  (Initial value :  $1.25 \times 10^{-3}$ )
- Range( $m^2$ ) :  $0.625 \times 10^{-3} < A_{i=1 \sim n} < 1.875 \times 10^{-3}$
- Constraint(MPa)  $|\sigma^j| \leq 15.0$ , ( $j = 103, 104, \dots, 302$ )

Fig.5는 목적함수인 중량 최적화 결과이다. 전역최적화를 위해 100,000회의 반복계산을 수행하였고, 이 중 목적함수와 구속조건을 80회 만족하였다. 그

결과로 초기 중량 4,729kg에서 4,505kg로 4.7% 경량화 되었으며, Table 4에서 11개 요소에서의 구속조건이 잘 만족되었음을 알 수 있다.

Fig.6은 상부 설계 파라미터들의 최적화 결과로써, 총 174개의 요소의 설계 파라미터에 대한 결과 중 상부영역에서 가장 큰 응력을 보인 'A' 영역의 최적화 결과를 보여주고 있다. 상대적으로 낮은 수준의 등가정하중이 작용하기 때문에 대부분의 부재에서 설계 parameter 값이 감소하게 되는데, Fig.6에서 최대응력이 발생했거나 등가정하중이 직접적으로 작용하는 요소 ①, ②, ③, ④에서 초기값 대비 4%~12% 증가하고, 나머지 요소에서는 12%~52% 감소하는 결과를 보인다.

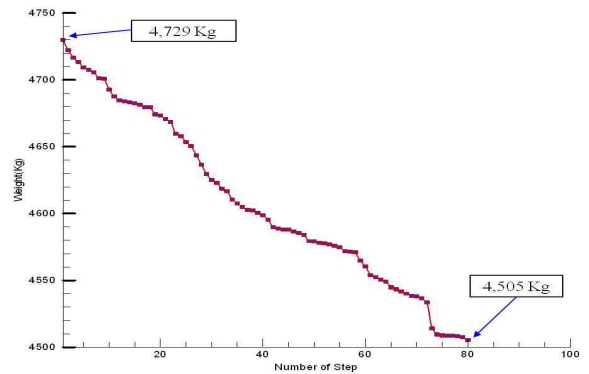


Fig. 5 Optimization Result of the objective function(weight)

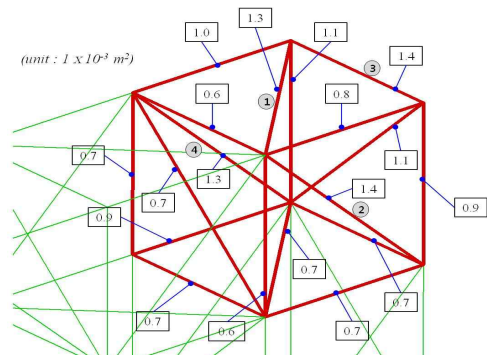


Fig. 6 Optimization result of design area 'A'

Table 4 Stress condition at the constraint elements

Elem. No.	$ \sigma_{max} $ (MPa)	
	Optimization	Constraint
103	13.00	$ \sigma  < 15.00$
104	13.64	
105	12.75	
106	14.84	
109	14.66	
128	10.50	
186	14.63	
225	10.35	
289	10.60	
291	7.89	
302	12.30	

#### 4. 결 론

일반적인 구조최적화는 외부하중을 이상적인 정하중으로 가정하고 수행된다. 그러나, 대부분의 구조물은 동하중을 받고 있기 때문에 구조안전성 측면에서 최적화를 수행할 때도 동하중의 영향을 고려하는 것이 타당하다. 하지만, 동하중을 고려하기 위해서는 동적 해석과정에서 많은 하중이 산출되는데 이 하중들을 모두 고려하는 것은 상당한 전산비용과 시간이 소요된다. 이런 문제를 개선하기 위해 본 연구에서는 동하중이 작용하는 구조물의 최적화를 위해 등가정하중 개념을 적용하였다. 등가정하중은 동하중의 영향이 반영된 보수적인 정하중을 의미한다. 등가정하중의 적절한 적용을 위해서는 동하중에 의한 구조물의 거동을 고려하여 등가정하중 분포 위치를 잘 선정해야 하는데, 본 연구에서는 등가정하중 분포 자유도로써 축소시스템 구축시 사용되는 주자유도 개념을 도입하고, 구속조건 요소 자유도, 외부하중 자유도로 구성되는 자유도들의 그룹을 사용하였고, 선정된 자유도 상에서 구해진 등가정하중을 적용하여 구조 최적화를 수행하였다. 수치예제에서는 모의 담금 기법을 적용하여 중량을 최소화하는 전역 최적화를 수행하였으며, 그 결과로 중량이 최소화 되면서 제한된 구속조건을 잘 만족하는 것을 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 전체 구조물을 한 개의 도메인으로 간주하여 모든 해석을 수행하였다. 그러나, 제안방법을 수백만개 이상의 자유도를 갖는 대형 구조물에 적용을 하기 위해서는 현재보다 효율성을 극대화 할 수 있는 기법의 도입이 필요할 것으로 사료

된다. 따라서, 본 연구는 제안된 최적화 방법을 기반으로 영역분할 기법과의 연동을 통한 대형 구조물의 최적화로 확장해 나갈 계획이다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Choi, W.S., Park, G.J., 1999, Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads Based on Modal Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.46, pp.29~43.
- (2) Choi, W.S. Park, K.J., 2000, Quasi-Static Structural Optimization Technique Using Equivalent Static Loads Calculated at Every Time Step as a Multiple Loading Condition, Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A., Vol.20(1), pp.2568~2580.
- (3) Choi, W.S., Kang, B.S., Park, K.J., 1998, Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads Based on Modal Analysis, Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A., Vol.22(7), pp.1193~1204.
- (4) Kim, H., Cho, M., 2006, Two-level Scheme for Selection of Primary Degrees of Freedom and Semi-analytic Sensitivity Based on the Reduced System, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.195(33-36), pp.4244~4268.
- (5) Kim, H., Cho, M., 2007, Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads by the Selection Scheme of Primary Degrees of Freedom, COSEIK J. Comput. Struct. Eng. Vol.20(1), pp.57~63.