

비틀림 비선형성을 갖는 2차원 익형의 모델링 및 Bifurcation 해석

Modeling and Bifurcation Analysis of the 2D Airfoil with Torsional Nonlinearity

임주섭†, 이상욱*, 김성준*

Joosup Lim, Sang-Wook Lee and Sung-Joon Kim

Key Words : 2D Airfoil Model(2차원 익형 모델), Nonlinear Flutter(비선형 플러터), Hopf Bifurcation(홉프 쌍갈림), Bifurcatin Boundary(쌍갈림 경계), Nonlinear Systems(비선형 시스템)

ABSTRACT

Recent developments for high altitude, long endurance conventional UAVs (HALE UAVs) have revealed new issues regarding aircraft structure design and analysis. First of all, due to intensive mission requirements, the structures of HALE UAVs have lightweight and very flexible main wing with high aspect ratio, and slender fuselage. For this kind of structures, aeroelastic characteristics are different from conventional aircrafts. Hence, currently developed analysis methods are not suitable to fully understand structural dynamics of the very flexible aircraft, and to guarantee structural reliability. Therefore, various structural studies considering nonlinear behaviors which are generally ignored for the conventional aircraft structural analysis have been attracting researchers interests. Nonlinear flutter of the very flexible wing is one of the subject to be studied in combination with strong coupling between aeroelastic characteristics and flight dynamics. Herein, as preliminary study, modeling and nonlinear system analysis of the 2D airfoil with torsional nonlinearity have been discussed.

1. 서 론

기 호 설 명

- h : plunge(플러지) 자유도
- α : pitch(피치) 자유도
- m : 단위 길이당 질량
- I_α : 비틀림 관성 모멘트
- ρ : 공기 밀도
- k_h : 선형 굽힘 스프링 상수
- k_α : 선형 비틀림 스프링 상수
- G_h : 비선형 굽힘 스프링 상수
- G_α : 비선형 비틀림 스프링 상수
- U : 유속

최근 항공 선진국들 주도로 개발되고 있는 고고도 장기 체공 무인기의 강화된 임무 수행 조건을 만족시키기 위해, 보다 높은 중형비의 날개와 가늘고 작은 동체형상을 갖는 항공기 구조 설계의 필요성이 증가하고 있다. 2003년 미국에서 행해졌던 Helios의 항공시험 중 파손 사건은⁽¹⁾, 유연항공기 구조설계의 신뢰성 확보를 위한 새로운 구조해석 방법의 연구를 촉진시키는 계기가 되었다. 이렇듯, 높은 중형비를 가진 경량, 유연구조 비행체의 공탄성 특성은 기존의 선형해석만으로는 해석이 불가능하게 만드는 요인들 (large deformation, low mode frequency 등)을 포함하고 있으며, 이를 극복하기 위한 비선형 해석 방법들이 연구되어지고 있다⁽²⁻³⁾. 단순한 2차원 익형 모델을 활용한 선형 및 비선형 플러터 해석, 제어 및 시험과 관련된 연구들 또한 활발히 진행되

† 한국항공우주연구원
E-mail : jooslim@kari.re.kr
Tel :042-870-3534, Fax :042-860-2604
* 한국항공우주연구원

고 있다⁽⁴⁻⁷⁾. 본 논문은 구조적 비틀림 비선형성을 포함한 2차원 익형의 모델링 및 비선형 플러터 거동에 대한 비선형 시스템 해석을 다루었다.

2. 모델링

2.1 개념도 및 운동방정식

Fig. 1에 2차원 익형 모델의 개념도를 제시하였다. 본 논문에서 다루고자 하는 2차원 익형은 조경면을 포함하고 있지 않으며 plunge (h)와 pitch (α)의 2 자유도를 갖는다. 여기서 L 과 M 은 각각 날개에 걸리는 양력(lift)과 비틀림 모멘트(torsional moment)이며, quasi-steady 유동을 가정하면 양력은,

$$L = \pi\rho b^2[\dot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + 2\pi\rho UbC(k)[\dot{h} + U\alpha + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha}] \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있으며, 비틀림 모멘트는,

$$M = \pi\rho b^2[ba\dot{h} - Ub(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha} - b^2(\frac{1}{8} + a^2)\ddot{\alpha}] + 2\pi\rho Ub^2(a + \frac{1}{2})C(k)[\dot{h} + U\alpha + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha}] \quad (2)$$

와 같이 표현할 수 있다⁽⁹⁾. Eq. (1) 과 (2)에 있는 $C(k)$ 는 Theodorsen's function이며, quasi-steady 상태에서는 $C(k) = 1$ 로 가정한다. 주날개의 대변형이 허용되는 유연구조에서는 구조적인 비선형성을 가정할 수 있으며, 3차항을 포함한 비선형 spring force 는,

$$\begin{aligned} K_h[h] &= k_h h(1 + G_h g^2) \\ K_\alpha[\alpha] &= k_\alpha \alpha(1 + G_\alpha \alpha^2) \end{aligned} \quad (3)$$

으로 표현할 수 있다. 본 논문에서는 plunge의 비선형성은 고려하지 않았으며 ($G_h = 0$), pitch의 비선형성만을 가정하여 모델링 및 해석을 수행하였다. 비틀림 비선형성과 quasi-steady airflow 상태를 가정하였을 때, 2차원 익형 모델의 최종 운동 방정식은,

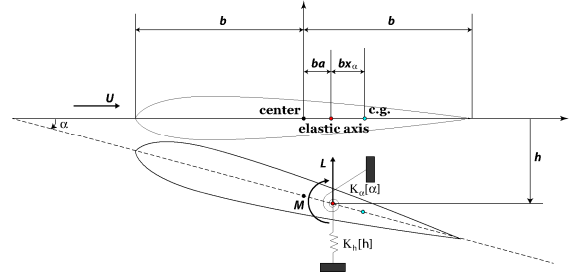


Fig. 1. Schematics of 2D Airfoil

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + mbx_\alpha\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha} + mw_h h &= -L \\ mbx_\alpha\ddot{h} + mr_\alpha^2\ddot{\alpha} + mr_\alpha^2w_\alpha\alpha(1 + G_\alpha\alpha^2) &= M \end{aligned} \quad (4)$$

와 같이 나타낼 수 있다⁽⁸⁾.

2.2 무차원화 및 상태방정식

수치해석을 위해, 운동방정식을 무차원화 시키고 그 후 상태방정식으로 표현하는 과정을 살펴보면 다음과 같다. 무차원화된 plunge, pitch, time은 각각 $\bar{h} = \frac{h}{b}$, α , $\tau = \frac{U}{b}t$ 로 정의한다. 이를 이용하여 Eq. (4)를 무차원화 하면,

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{h}} + x_\alpha\ddot{\alpha} + \frac{\bar{w}^2}{V^2}\bar{h} &= -\bar{L} \\ x_\alpha\ddot{\bar{h}} + r_\alpha^2\ddot{\alpha} + \frac{r_\alpha^2}{V^2}\alpha(1 + G_\alpha\alpha^2) &= \bar{M} \end{aligned} \quad (5)$$

와 같다. 좌측 항의 \bar{L} 과 \bar{M} 은 각각 무차원화된 양력과 비틀림 모멘트이며,

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{\mu} \left[\ddot{\bar{h}} + \dot{\alpha} - a\ddot{\alpha} + 2\left\{ \dot{\bar{h}} + \alpha + \left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right\} \right] \\ \bar{M} &= \frac{1}{\mu} \left[a\ddot{\bar{h}} - \left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} - \left(\frac{1}{8} + a^2\right)\ddot{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + 2\left(a + \frac{1}{2}\right)\left\{ \dot{\bar{h}} + \alpha + \left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 정의된 무차원 상수들은 Table 1 에서 설명하였다. 이후의 선형 및 비선형 해석과 수치해석을 위해, Eq. (5)와 (6)을 상태 방정식으로 표현하는 것이 용이하다. 우선, 다음과 같이 F_1 과 F_2 을 정의한다.

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \ddot{\bar{h}} + x_\alpha \ddot{\alpha} + \frac{\bar{w}^2}{V^2} \bar{h} + \bar{L} = 0 \\
F_2 &\equiv x_\alpha \ddot{\bar{h}} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + \frac{r_\alpha^2}{V^2} \alpha (1 + G_\alpha \alpha^2) - \bar{M} = 0
\end{aligned} \quad (7)$$

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ G_1 \\ 0 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

2차항을 한 개 씩만 포함한 두 식으로 분리하기 위해 Eq. (7)의 각 함수에서 $\ddot{\bar{h}}$ 와 $\ddot{\alpha}$ 를 각각 소거하면 다음과 같이,

$$\begin{aligned}
F_{\bar{h}} &= \left(\frac{1}{8\mu} + \frac{a^2}{\mu} + r_\alpha^2 \right) F_1 - \left(-\frac{a}{\mu} + x_\alpha \right) F_2 = 0 \\
F_\alpha &= \left(-\frac{a}{\mu} + x_\alpha \right) F_1 - \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) F_2 = 0
\end{aligned} \quad (8)$$

$\ddot{\bar{h}}$ 와 $\ddot{\alpha}$ 를 각각 포함한 $F_{\bar{h}}$, F_α 두 개의 식으로 분리할 수 있다. 식 전체의 전개는 본 논문상에는 생략하도록 한다. 총 4개의 상태 변수를 $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T = \{\bar{h}, \dot{\bar{h}}, \alpha, \dot{\alpha}\}$ 와 같이 정의하고, Eq. (8)의 두 식을 이용하여 상태 방정식을 구성하면,

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} + \{N\} y_3^3 \quad (9)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 행렬 $[J]$ 는 상태변수의 1차항의 계수들로 이루어진 행렬이며, 안정평형점인 원점 ($\{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T = \{0, 0, 0, 0\}$)에서의 시스템의 Jacobian이다. 벡터 $\{N\}$ 은 pitch nonlinearity (y_3^3)의 계수이다. Table 1에 제시된 무차원 상수들로 이루어진, $[J]$ 와 $\{N\}$ 에 나타난 각 계수들을 간단한 알파벳으로 표현하면 다음의 구조를 나타내고 있다. $[J]$ 는

$$[J] = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

와 같이 표현되며, $\{N\}$ 은

와 같이 표현할 수 있다. 문자로 표현되어진 각 계수항들은 본 논문에서 다룰 필요 없는 복잡한 식들을 포함하므로, 지면상에서 생략하도록 한다.

3. Bifurcation 해석

3.1 Bifurcation Point & Type

시스템이 비선형 불안정 상태로 전환되는 해당 상수(제어상수)의 임계값을 bifurcation point라고 한다. Bifurcation point를 구하기 위해서 평형점의 Jacobian을 먼저 구하여야 한다. 위에서 정의한 상태공간에서의 평형점은 원점이기 때문에 이는 자연스럽게 Eq. (9)에서의 $[J]$ 가 된다. 시스템의 안정성 판별은 평형점 부근의 선형화 영역에서 이루어지므로, bifurcation point를 구할 때 비선형 항들은 고려하지 않는다. 원점 $\underline{y}_0 = \{0, 0, 0, 0\}^T$ 에서 안정성 판별을 위한 특성방정식은,

$$\Lambda(\lambda) = \det [J|_{\underline{y}_0} - I\lambda] = 0 \quad (12)$$

Table 1. Nondimensional parameters

	Description
$V = \frac{U}{w_\alpha b}$	nondimensional freestream velocity
$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$	density ratio
$r_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{mb^2}}$	radius of gyration
$\frac{\bar{w}}{w} = \frac{w_h}{w_\alpha}$	plunge-pitch natural frequency ratio
$w_h = \sqrt{\frac{k_h}{m}}$	uncoupled natural bending frequency
$w_\alpha = \sqrt{\frac{k_\alpha}{I_\alpha}}$	uncoupled natural torsional frequency
a	distance from airfoil center to elastic axis
x_α	distance from elastic axis to c.g.

로 표현할 수 있다. 이는 Jacobian ($J|_{y_0}$)의 eigenvalue를 계산하여 평형점의 안정성(stability)을 판별하는 것으로, complex conjugate pair인 두 개의 eigenvalue가 허수축을 좌측에서 우측으로 가로지를 때 (실수부가 0이 될 때, 즉 $\lambda_{1,2} = \pm jw$) 평형점에서 Hopf bifurcation이 일어나게 된다. 본 논문에서는 제어상수로 V (non-dimensional freestream velocity), x_α (distance from elastic axis to c.g.), 그리고 μ (density ratio)의 세가지를 고려하였다. 제어 상수를 제외한 시스템 상수들은 각각, $r_\alpha = 0.5$, $\bar{w} = 0.5$, $G_\alpha = 0.5$, $a = -0.35$ 를 사용하였다. Fig. 2는 각 제어상수들의 변화에 따른 특성방정식의 근궤적 선도를 보여주고 있다. 각각의 근궤적 선도에서 첫 번째 complex conjugate eigenvalue가 허수축을 가로지를 때 Hopf bifurcation이 일어난다. 이처럼 단순화된 모델에 대해서는 직접 Jacobian을 구하고, eigenvalue들을 추적함으로써 bifurcation point를 구하는 것이 가능하다.

Hopf bifurcation은 supercritical Hopf bifurcation과 subcritical Hopf bifurcation으로 분류할 수 있으며, 일반적으로 시스템을 지배하는 비선형 항의 최고 차수에 따라 결정이 된다. 본 논문에서처럼 3차항이 최고 차항인 경우 supercritical Hopf bifurcation (Fig. 3)이 일어나며, 만일 최고차항이 5차항일 경우, subcritical Hopf bifurcation (Fig. 4)이 일어나게 된다. Fig. 4에서 볼수 있듯이

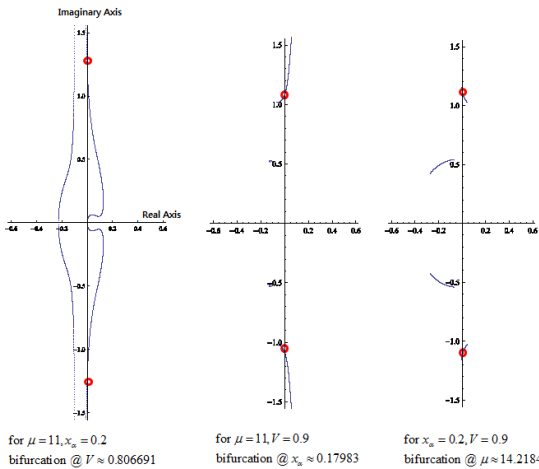


Fig. 2. Root locus plot for each control parameter

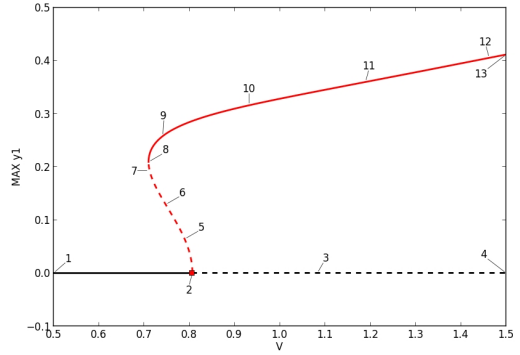


Fig. 4. Subcritical Hopf bifurcation

일반적으로 subcritical case는 갑자기 큰 진폭의 limit cycle이 생겨나는 jump phenomenon을 동반하며, 이는 예측 혹은 후속조치가 불가능한 심각한 파손을 초래할 수 있는 위험성을 내포하고 있다. 그렇기 때문에 supercritical 과 subcritical bifurcation 특성에 대한 연구는 매우 중요하다. 이를 실제 bifurcation이 일어나기 이전에 예측하는 연구 또한 진행되고 있으며⁽¹⁰⁾, 플러터와 같은 시스템의 안전성과 직결되는 문제에 이러한 적용을 하기 위해서는 본 논문에서와 같이 공탄성 시스템과 Hopf bifurcation과의 상관관계에 대한 연구들이 선행되어야 한다.

3.2 Bifurcation Boundary

위에서 살펴보았던 세가지의 제어 상수 V , x_α , μ 에 대하여 parameter space상에 시스템의 안정 영역과 불안정 영역을 나타낼 수 있다면, 시스템 상수들을 운용 목적에 맞게 최적화 시킬 수 있는 길잡이

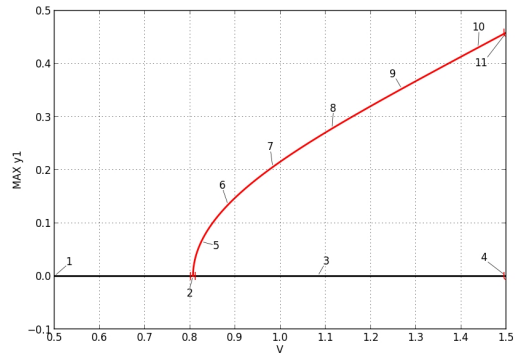


Fig. 3. Supercritical Hopf bifurcation

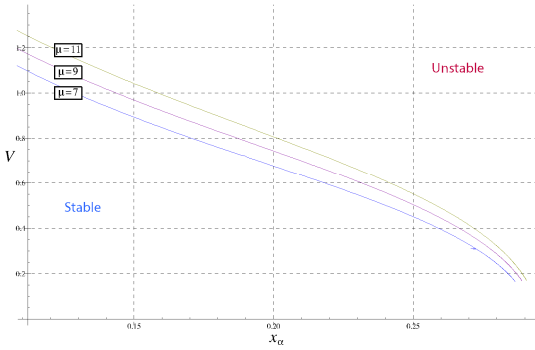


Fig. 5. Bifurcation boundary on $x_\alpha - V$ parameter space

가 될 수 있다. 이처럼 parameter space 상에서 시스템의 안정/불안정 영역을 나누는, bifurcation point 들로 이루어진 경계선을 bifurcation boundary라 한다. Bifurcation boundary는 시스템 모니터링 및 센서 등의 다양한 활용에 연구되고 있으며⁽¹¹⁻¹³⁾, 본 논문에서는 시스템의 파라미터 개념설계의 기법으로서 접근해 보도록 한다.

Bifurcation boundary는 이론식, 수치해석, 실험 단계에서 모두 가능하다. 실제 존재하는 시스템에 대하여 제어가 가능한 상수들로 이루어진 parameter space 상에 실험을 통해 구해진 bifurcation point 들을 표시하여 선도를 그릴 수 있으며, 복잡한 모델 식에 대해서는 각각의 상수에 대하여 numerical integration을 통해 직접 bifurcation point를 찾아 실험과 같은 방법으로 bifurcation boundary를 얻을 수 있다.

본 논문에서는 단순화 된 모델의 이론식으로부터 bifurcation boundary를 찾는 과정을 다루었다. 앞서서도 논의하였듯이, Eq. (12)의 특성방정식으로부터 시스템에 Hopf bifurcation이 일어나는 조건은, 한쌍의 complex conjugate eigenvalue가 복소수평면의 허수축상에 위치할 때, 즉 $\lambda = \pm jw$ 일 때 이다. 이를 특성방정식에 대입하면 다음과 같이 두 개의 식을 얻게 되며,

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\Lambda(\pm jw)\} &= 0 \\ \text{Im}\{\Lambda(\pm jw)\} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

현재 시스템 상에서 아직 정의되지 않은 값들은 V , x_α , μ , 그리고 bifurcation이 일어나는 frequency

w 이다. $x_\alpha - V$ parameter space 상에서 bifurcation boundary를 구하기 위해 μ 를 특정 값으로 정의한다. 여기서는 $\mu=7$, $\mu=9$, 그리고 $\mu=11$ 의 세 가지 값을 고려하도록 한다. μ 를 결정한 후, w 를 0부터 충분히 작은 Δw 간격으로 증가시켜가며 각 w 값에 대하여 Eq. (13)으로 부터 x_α , V 값을 계산한다. w 는 운용범위 내의 parameter space 상에 boundary가 형성되는 값들을 그 범위로 지정한다. 주의해야 할 점은, x_α , V 값이 계산되었을 때 $\pm jw$ 이외의 eigenvalue들이 모두 복소수 평면의 허수축 좌측에 위치하고 있는 지 확인해 보아야 한다는 것이다. 만일 허수축 우측에 다른 eigenvalue들이 존재하고 있다면 시스템은 이미 불안정 상태이며, 이때 주어진 w 와 구해진 해 x_α , V 는 모두 bifurcation과는 무관한 값이다.

위의 과정을 통해 얻은 bifurcation boundary는 Fig. 5에서 확인할 수 있으며, 이를 통해 limit cycle bifurcation이 일어나는 조건과 고려된 제어 상수들의 상관관계를 선도를 통해 보기 쉽게 나타낼 수 있다. Fig. 5를 살펴보면, 무게중심이 elastic axis에 가까워질수록, 즉 x_α 가 감소할수록 안정상태의 유속 범위가 커지고, 날개의 질량이 증가할수록, 즉 μ 가 증가할수록 안정상태의 유속 범위가 커진다는 것을 쉽게 알 수 있다. 이처럼 개념 설계 단계에서 bifurcation boundary를 통해 목표로 하는 운용 범위 (유속 범위) 내에서 시스템 상수들 (질량, 무게중심의 위치 등)의 1차적인 최적화를 수행 할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 비틀림 비선형성을 갖는 2차원 유형의 모델링과, 비선형 거동 즉 Hopf bifurcation에 의해 발생되는 limit cycle 플러터 해석에 대한 내용을 다루었다. 수학적 모델 내의 비선형 항은 시스템의 안정성 여부를 판별하는 데에는 영향을 끼치지 않으나, 시스템에 bifurcation이 일어난 이후의 비선형 거동의 경향에는 큰 영향을 끼친다. 본 논문에서 살펴본 Hopf bifurcation의 경우 supercritical 혹은 subcritical 여부에 따라 시스템이 불안정상태에 도달하였을 경우의 위험도의 차이가 크며, 이러한 위험성을 미리 파악하기 위해서는 시스템의 비선형성

에 대한 연구가 이루어져야 한다.

단순화 된 모델의 이론식에 대하여, 시스템 최적화를 위한 제어 상수들을 정의하고 정의된 parameter space 상에서 bifurcation boundary를 얻어냄으로써 시스템 상수들을 개념설계 단계에서 1차적으로 최적화 시킬 수 있다. 이는 시스템의 잠재적인 비선형성을 개념설계 단계에서 고려하고 시스템 상수 설계에 적용한다는 것에서 그 의미가 크다고 할 수 있다. 또한, 추후 비선형성이 고려된 2차원 익형의 풍동 시험을 수행하고, 비선형 플러터가 일어나기 전에 플러터가 일어나는 운용 조건을 예측할 수 있는 시스템 특성 (e.g. critical slowing down⁽¹⁰⁾) 연구의 기초 연구로서 그 의미를 갖는다.

후 기

본 연구는 기초기술연구회 산하 한국항공우주연구원 항공우주기술시드사업 기초연구과제 “유연항공기의 비선형 공탄성 해석 및 시험 기법의 연구” 수행 결과의 일부이며, 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Noll, T. E., Brown, J. M., Perez-Davis, M. E., Ishmael, S. D., Tiffany, G. C. and Gaier, M., 2004, Investigation of the Helios Prototype Aircraft Mishap. Volume 1: Mishap Report

(2) Cesnik, C. E. S. and Su, W., 2011, Nonlinear Aeroelastic Simulation of X-HALE: a Very Flexible UAV, AIAA 2011-1226, 49th AIAA Aerospace Science Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition 4-7 January 2011, Orlando, Florida

(3) Ghommem, M., Hajji, M. R. and Nayfeh, A. H., 2010, Uncertainty Analysis near Bifurcation of an Aeroelastic System, Journal of Sound and Vibration, 329, pp. 3335~3347

(4) O'Neil T., 1996, Nonlinear Aeroelastic Response - Analysis and Experiments, AIAA-96-0014, 34th Aerospace Science Meeting and Exhibit 15-18 January 1996, Reno, NV

(5) C.C. Marsden and S.J. Price, 2005, The

aeroelastic response of a wing section with a structural free-paly nonlinearity: An experimental investigation, Journal of Fluids and Structures, Vol. 21, pp. 257~276

(6) Jae-Sung Bae, Do-Hyung Kim, Seung-Man Yang and In Lee, 2001, Flutter Suppression of 2-D Wing/Store Model, Proceedings of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering Conference II, pp. 1197~1201

(7) Juho Lee, Jun-Seong Lee, Yeol-Hun Sung and Jae-Hung Han, 2012, Flutter Experiment Equipment Design with Compliant Mechanism, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 22, No. 4, pp.393~400

(8) Bisplingho, R., Ashley, H., and Halfman, R., Aeroelasticity, Addison-Wesley Publishing Company, 1955

(9) Theodorsen, T., 1935, General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, Tech. rep., NACA report 496

(10) Lim, J. and Epureanu, B. I., 2011, Forecasting a class of bifurcations: theory and experiment, Physical Review E, 83 (1 pt 2): 016203

(11) Yin, S.H. and Epureanu, B.I., 2005, Enhanced nonlinear dynamics and monitoring bifurcation morphing for the identification of parameter variations. Journal of Fluids and Structures, Vol. 21, pp. 543~559

(12) Lim, J. and Epureanu, B.I., 2011, Exploiting delayed nonlinear feed-back for sensing based on bifurcation morphing, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 11, No. 4, pp. 621~640

(13) Lim, J. and Epureanu, B.I., 2012, Forecasting bifurcation morphing: application to cantilever-based sensing. Nonlinear Dynamics, Vol. 67, No. 3, pp. 2291~2298