

# 액체로켓 엔진의 동특성 모델을 이용한 전달함수의 계산

박순영\*† · 이은석\*\*

## Calculation of the Transfer Function for a Liquid Rocket Engine using a Dynamic Model

Soon-Young Park\*† · Eun-Seok Lee\*\*

### ABSTRACT

In the process of liquid rocket engine design, obtaining method of the dynamic characteristics of engine should be emphasized typically to determine the control logic and algorithms of the throttle valves in the propellant feed pipeline. However, determining the dynamic characteristics of an engine through the autonomous test is very hard and laborious, so that the numerical approach is prevailing. In this study, using the previously developed dynamic analysis model of the engine around the steady state, we introduced a disturbance to this model, and obtained the dynamic response in the time domain. And by applying the well-known Levy method to this temporal response, we could deduce the transfer function of that system that can give us various information of engine and can be manipulated to design the control system.

### 초 록

액체로켓 엔진의 제어 로직이나 제어 알고리즘을 설계하고 유량제어밸브의 작동 스킴을 결정하는데 있어서 엔진의 동특성을 파악하는 것은 무엇보다 중요한 일이다. 하지만 엔진의 동특성을 시험을 통해서 사전에 얻는 것은 상당히 어려운 일이기 때문에 해석적인 모델을 이용하는 경우가 많다. 이에 본 연구에서는 기존에 개발된 엔진의 정상상태 부근에서의 동특성 해석 모델을 이용하여 이러한 동특성 모델을 계산하였다. 해석 모델을 이용하여 외란을 가하여 얻어진 응답특성을 Levy 방법을 이용하여 엔진의 동특성 모델을 하나의 전달함수로 근사할 수 있음을 보였다.

Key Words: Liquid Rocket Engine(액체로켓 엔진), Transfer Function(전달함수), Levy Method(Levy 방법)

### 1. 서 론

로켓 엔진은 발사체의 임무 요구조건을 충족시킬 수 있는 성능 - 추력 및 비추력 성능과 연료 소모량 등 - 을 확보해야 한다. 특히 액체 연

\* 한국항공우주연구원 엔진팀

† 교신저자, E-mail: psy@kari.re.kr

료를 사용하는 엔진의 경우 비행 중 추력과 혼합비의 능동적인 제어가 가능하기 때문에 많은 로켓에 적용되고 있는 실정이다. 가스발생기 사이클 엔진의 경우 터빈으로 공급되는 가스의 온도를 일정하게 유지시켜주기 위한 가스발생기 혼합비 제어가 필요하게 된다. 또한 비행 중 펌프 입구로 공급되는 추진제의 압력이나 온도가 변하는 요인으로 발생하는 외란이나, 하드웨어 설계나 제작 등의 오차로 발생하는 내부 분산 요인에 의한 성능 오차를 보정하기 위한 제어시스템이 필요하다. 엔진의 제어 개념을 구체화하기 위해서는 제어 대상인 엔진의 작동 파라미터 - 연소압, 온도, 회전수 등을 측정하고 이를 안정적인 제어 알고리즘에 의해 가공한 후, 다시 엔진의 유량 조절을 수행하는 유량제어밸브의 제어기구로 전달하게 된다. 특히, 제어 로직이나 제어 알고리즘을 설계하고 유량제어밸브의 작동스킴을 결정하는데 있어서 엔진의 동특성을 파악하는 것은 무엇보다 중요한 일이다. 하지만 엔진의 동특성을 실제 시험을 통해서 얻는 것은 상당히 많은 노력이 필요하기 때문에 해석적인 모델을 이용하는 경우가 많다[1].

이에 본 연구에서는 기존에 개발된 엔진의 정상상태 부근에서의 동특성 해석 모델[2]을 이용하여 액체로켓 엔진의 전달함수를 계산하는 방안에 대해서 살펴보았다. 동특성 해석 모델에 인위적으로 외란을 가하는 수치시험(Numerical Test)을 수행하여 얻어진 시간역에서의 응답특성을 시스템확인(System Identification) 방법을 이용하여 주파수 영역의 전달함수로 근사할 수 있음을 보였다.

## 2. 본 론

### 2.1 엔진의 동특성 모델

엔진의 동특성 모델은 기존 연구[2]에서 개발된 모델을 기본으로 하였다. Simulink를 이용하여 액체로켓을 구성하는 터보펌프(TP), 연소기(CC), 가스발생기(GG), 배관이나 밸브 등에 대한 동역학 모델을 개발하였으며, 이를 이용하여 엔

진의 동특성을 시간역에서 분석할 수 있다. 본 동역학 모델의 검증은 참고문헌 [2]에서 살펴본 바와 같이 TP+GG 연계시험 결과에 대한 모사를 통하여 수행하였다. 다만, 연소기 부분의 모델에 대해서는 TP+GG 연계시험에서 검정의 불가능하였으며, 이는 추후 엔진시스템 시험을 통하여 검증되어야 할 부분이다.

### 2.2 System Identification Method

엔진의 동특성 모델을 이용하여 제어밸브의 개도 변화에 따른 시간역에서의 연소압 변화를 주파수 영역에서의 전달함수로 계산하기 위한 System Identification 방법으로 본 연구에서는 Levy 방법을 이용하였다[3~4]. Levy 방법은 식 (1)과 같은 시스템의 주파수 전달함수를 계산하기 위하여 시간 역에서의 시험이나 계산 결과를 활용하는 기법이다. 즉, 시간역에서 시스템의 임펄스 응답을 이용하여 최소자승오차법(Least Square Method)를 이용하여 전달함수의 계수를 계산하는 방법이다. 참고문헌 [3]에 제시되어 있는 Levy 방법을 구체적으로 살펴보도록 하자.

$$G(jw) = \frac{A_0 + A_1(jw) + A_2(jw)^2 + \dots}{B_0 + B_1(jw) + B_2(jw)^2 + \dots} \quad (1)$$

먼저, 시간역에서의 시스템의 임펄스 응답을 구간으로 나누어 이를 power series 로 근사할 수 있다. 대부분의 경우 2차 근사로도 충분한 정도의 정확도를 얻을 수 있다. 즉, 주어진 임의의 시간  $t$ 에 대하여 그림 1과 같이  $c(t)$ 를 다음의 식 (2)로 모사할 수 있다.

$$c(t) = c_n + \Delta c = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (2)$$

단,  $t = nh + \Delta t$ 를 의미하며,  $h$ 는 시간의 증분을 의미하고,  $n$ 은 구간을 의미한다. 이로부터,

$$\Delta c = a_0 - c_n + a_1 nh + a_2 n^2 h^2 + (a_1 + 2a_2 nh)\Delta t + a_2 \Delta t^2 \quad (3)$$

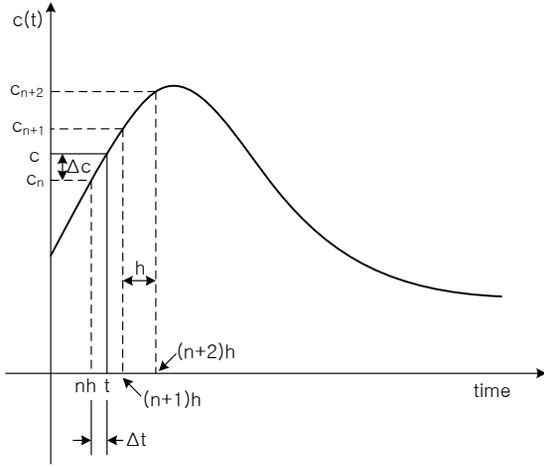


Fig. 1 An Arbitrary Response in Time Domain

를 얻을 수 있다.  $\Delta c = 0$ 이며  $\Delta t = 0$ 이므로 식 (3)은

$$\Delta c = A_1 \Delta t + A_2 \Delta t^2 \quad (4)$$

가 되며, 여기서

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 + 2a_2 nh \\ A_2 &= a_2 \end{aligned}$$

가 된다. 또한  $\Delta c = c_{n+1} - c_n$ 이고,  $\Delta t = h$ ,  $\Delta c = c_{n+2} - c_n$ ,  $\Delta t = 2h$ 이고 이를  $A_1$ 과  $A_2$ 를 계산하기 위하여 식 (4)에 대입하며,

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= A_1 h + A_2 h^2 \\ c_{n+2} - c_n &= 2A_1 h + 4A_2 h^2 \end{aligned} \quad (5)$$

가 된다. 이를  $A_1$ 과  $A_2$ 에 대하여 풀면,

$$A_1 = \frac{3(c_{n+1} - c_n) - (c_{n+2} - c_{n+1})}{2h} \quad (6)$$

$$A_2 = \frac{(c_{n+2} - c_{n+1}) - (c_{n+1} - c_n)}{2h} \quad (7)$$

이 된다. 이는 다시  $\delta c_n = c_{n+1} - c_n$  및  $\delta^2 c_n = \delta c_{n+1} - \delta c_n$ 의 표기를 이용하면

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2\delta c_n - \delta^2 c_n}{2h} \\ A_2 &= \frac{\delta^2 c_n}{2h^2} \end{aligned} \quad (8)$$

로 표기할 수 있다. 식 (2)와 (8)을 결합하면,

$$c(t) = c_n + A_1(t - nh) + A_2(t - nh)^2 \quad (9)$$

$$= c_n + a\delta c_n + \frac{a}{2}(a-1)\delta^2 c_n \quad (10)$$

이 된다. 단,

$$a = \frac{(t - nh)}{h}$$

가 된다. 식 (10)으로부터 주파수 특성 함수를 계산하기 위하여 다음과 같은 단위 스텝함수  $u(t)$ 를 조합한 게이트 함수를 적용할 수 있다.

$$u(t - nh) - u(t - (n+2)h)$$

이는 주어진 구간 이외의 모든 구간에서 함수값을 0으로 만들기 위한 방안이다. 이로부터 식 (9)는

$$\begin{aligned} c_n(t) &= [c_n + A_1(t - nh) + A_2(t - nh)^2] \\ &\times [u(t - nh) - u(t - (n+2)h)] \end{aligned} \quad (11)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이 식을 라플라스 변화하면

$$\begin{aligned} C_n(s) &= \int_0^\infty c_n(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{nh}^{(n+2)h} c_n(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_n \int_{nh}^{(n+2)h} e^{-st} dt + A_1 \int_{nh}^{(n+2)h} te^{st} dt \\
&- nhA_1 \int_{nh}^{(n+2)h} e^{-st} dt \\
&+ A_2 \int_{nh}^{(n+2)h} t^2 e^{-st} dt - 2A_2 nh \int_{nh}^{(n+2)h} te^{-st} dt \\
&+ A_2 n^2 h^2 \int_{nh}^{(n+2)h} e^{-st} dt \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_n(s) &= c_n \frac{e^{-snh}}{s} - c_n \frac{e^{-s(n+2)h}}{s} \\
&- 2A_1 h \frac{e^{-s(n+2)h}}{s} \\
&- 4A_2 h^2 \frac{e^{-s(n+2)h}}{s} + A_1 \frac{e^{-snh}}{s^2} \\
&- A_1 \frac{e^{-s(n+2)h}}{s^2} \\
&- 4A_2 h \frac{e^{-s(n+2)h}}{s^2} + 2A_2 \frac{e^{-snh}}{s^3} \\
&- 2A_2 \frac{e^{-s(n+2)h}}{s^3} \quad (13)
\end{aligned}$$

전체 임펄스 응답에 대한 근사 변환은  $t=0$ 에서부터  $c(t)$ 가 충분히 0에 수렴할 때까지 각 구간을 합산하여 얻을 수 있다. 즉,

$$C(s) = \sum_{n=0}^{K-1} C_{2n}(s) \quad (14)$$

이 된다. 정상상태 대응값에 해당하는  $s$  오퍼레이터와 사인·코사인 함수를 대입함으로써 시스템의 주파수 응답함수인  $F(jw)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
F(jw) &= \sum_{n=0}^{2K-2} (\cos nhw - j \sin nhw) \\
&\times \left( \frac{c_n}{w} \sin 2hw - \frac{A_1}{w^2} + \frac{A_1}{w^2} \cos 2hw \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{2A_1 h}{w} \sin 2hw + \frac{4A_2 h^2}{w} \sin 2hw \\
&+ \left. \frac{4A_2 h}{w^2} \cos 2hw - \frac{2A_2 h}{w^3} \sin 2hw \right) \\
&+ j \left( \frac{c_{2n}}{w} \cos 2hw - \frac{c_n}{w} - \frac{A_1}{w^2} \sin 2hw \right. \\
&+ \frac{2A_1 h}{w} \cos 2hw + \frac{4A_2 h^2}{w} \cos 2hw \\
&- \left. \frac{4A_2 h}{w^2} \sin 2hw + \frac{2A_2}{w^3} - \frac{2A_2}{w^3} \cos 2hw \right) \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} (\cos nhw + j \sin nhw) (Re + jIm) \quad (15)
\end{aligned}$$

단,

$$\begin{aligned}
Re &= (c_{2n} + 2A_1 h + 4A_2 h^2) \frac{\sin 2hw}{w} \\
&+ (A_1 + 4A_2 h) \frac{\cos 2hw}{w^2} - \frac{A_1}{w^2} \\
&- \frac{2A_2}{w^3} \sin 2hw \\
Im &= (c_{2n} + 2A_1 h + 4A_2 h^2) \frac{\cos 2hw}{w} \\
&- (A_1 + 4A_2 h) \frac{\sin 2hw}{w^2} - \frac{c_n}{w} \\
&+ \frac{2A_2}{w^3} (1 - \cos 2hw) \quad (16)
\end{aligned}$$

주어진 주파수에 대하여  $F(jw_k)$ 와  $G(jw_k)$  사이의 오류는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\epsilon(w_k) &= F(jw_k) - G(jw_k) \\
&= F(jw_k) - \frac{N(w_k)}{D(w_k)} \quad (17)
\end{aligned}$$

$N$ 개의 샘플링 주파수를 이용하여 다음과 같이 가장 최소자승오차 함수를 정의할 수 있다.

$$E = \sum_{k=1}^N |F(jw_k)D(w_k) - N(w_k)|^2 \quad (18)$$

식 (18)을  $G(jw)$ 의 각각의 계수에 대하여 미분하여 0이 되는 식을 세워 최소자승오차의 최소값을 찾을 수 있으며, 이는 곧 선형 연립방정식의 풀이로 된다. 본 연립방정식의 해를 구함으로써 전달함수를 계산할 수 있다.

### 2.3 해석 결과

2.1장의 해석 모델을 이용하여 가스발생기 산화제 공급라인에 위치하는 유량제어밸브의 거동에 따른 시스템의 응답특성으로 연소기 압력( $P_{cc}$ )을 다음과 같이 계산할 수 있다. 이때 System Identification 기법을 이용하여 전달함수를 계산하는데 있어서 시스템의 영점과 극점의 차수에 대한 정보를 미리 확인할 수 없기 때문에, 다양한 차수의 조합을 통해 최적의 전달함수를 도출할 수 있었다.

유량제어밸브의 초기 개도에 대해서 가스발생기 유량을 증가시켜 추력을 증가시키기 위한 열림 방향(augmentaion)과 반대로 추력을 감소시키기 위하여 밸브를 닫는 방향(throttling)에 대해서 각각의 시스템 응답특성을 계산하였다.

#### a. Valve Augmentation Case

밸브를 개방하는 경우에 대한 연소압의 응답특성을 fig. 2에 제시하였다. 임펄스 응답의 경우 초기 외란에 대하여 진동감쇄하는 특성을 보여주고 있다. 2.2장의 방법을 이용하여 계산된 전달함수의 임펄스 응답과 스텝 응답을 실선으로 표시하였으며, table 1과 같이 극점 4개, 영점 2개인 전달함수로 모사하였을 때 상당히 유사한 특성을 보여주는 것으로 나타났다. Fig. 2에서 볼 수 있듯이 해석 모델에서 얻은 스텝 응답과 2.2장에서 얻은 전달함수로부터 얻은 스텝 응답의 특성이 매우 유사하며, 정상상태 응답도 일치하는 것을 볼 수 있다. 이렇게 얻은 전달함수를 이용하여 fig. 3과 같이 주파수 영역에 대한 응답특성(Bode diagram)을 계산할 수 있다. 이러

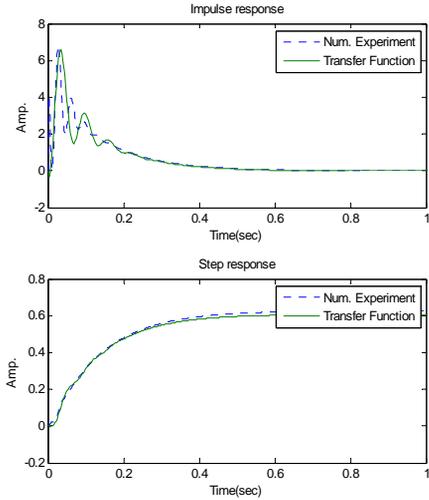


Fig. 2 Impulse and Step Response of Pcc for Valve Augmentation

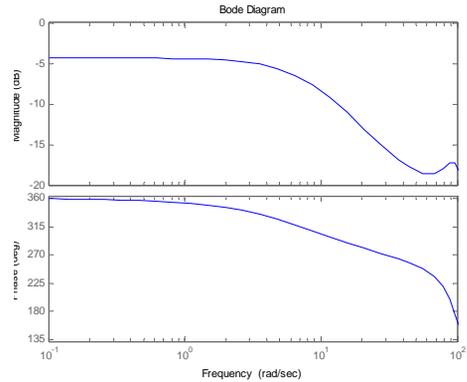


Fig. 3 Frequency Response of Pcc for Valve Augmentation

한 주파수 응답특성은 향후 엔진의 제어기 설계에 매우 유용하게 적용될 수 있을 것이다.

$$\text{전달함수} = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + 1}$$

#### b. Valve Throttling Case

밸브를 닫는 경우에 대한 연소압의 응답 특성을 fig. 4에 제시하였다. Fig. 2의 밸브를 여는 경

우에 비하여 밸브를 닫는 경우의 진폭이 다소 감소하는 것으로 나타났는데, 이는 유량제어밸브의 개도에 따른 손실계수(Cv) 특성이 선형적이지 않기 때문이다. 즉, 밸브를 여는 방향에 대해서 밸브 개도에 대한 민감도가 더 크기 때문이

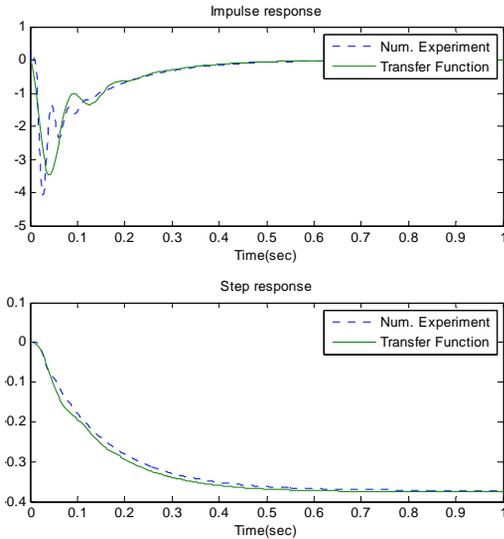


Fig. 4 Impulse and Step Response of Pcc for Valve Throttling

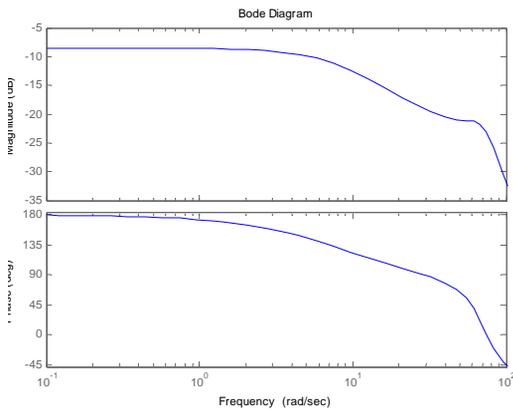


Fig. 5 Frequency Response of Pcc for Valve Throttling

다. 밸브를 여는 경우와 마찬가지로 닫는 경우에 있어서도 임펄스 응답의 경우 초기 외란에 대하여 진동감쇄하는 특성을 보여주고 있다. 계산된

전달함수의 임펄스 응답과 스텝 응답을 실선으로 표시하였으며, table 1과 같이 극점 4개, 영점 1개인 전달함수로 모사하였을 때 상당히 유사한 특성을 보여주는 것으로 나타났다. 마찬가지로 fig. 5와 같이 주파수 영역에 대한 응답특성을 계산할 수 있다.

$$\text{전달함수} = \frac{a_1 s + a_0}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1}$$

Table 1. Coefficients of Transfer Function

계수	밸브 열림 시	밸브 닫힘 시
$a_2$	-4.345e-04	0
$a_1$	0.1118	-7.968e-02
$a_0$	0.6048	-0.3746
$b_4$	2.428e-04	5.14e-06
$b_3$	1.25e-04	2.667e-04
$b_2$	2.568e-02	3.011e-02
$b_1$	0.3166	0.3446

### 3. 결론

본 연구에서는 액체로켓 엔진 제어시스템 설계를 위한 사전 해석 차원의 엔진 전달함수를 Simulink 동특성 모델을 이용하여 계산하였다. 해석적인 엔진 동특성 모델에 외란으로 가스발생기 유량제어밸브의 개도를 스텝 입력을 가하여 얻어진 시간역의 연소압 응답 곡선을 Levy 방법을 이용하여 주파수 전달함수를 계산하였다. 이러한 근사 전달함수를 이용하여 앞으로 엔진 시스템의 제어 알고리즘 개발이나 제어기구 설계에 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

향후 본 모델과 전달함수를 이용하여 엔진 시스템 시험에 적용될 수 있는 제어기를 설계하거나, 피드백 제어가 없는 엔진의 페루프 안정성과 저주파 불안정성에 대한 탐색 연구를 수행할 수 있을 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

- 1 V. Shnyakin and et. al., "Investigation of Characteristics of the Vega LV Fourth Stage Main Engine Assembly : Low-Frequency Oscillations Stability, Lateral Disturbances at Startup," IAC-09-C4.1.7, 2009
- 2 박순영, "Simulink를 이용한 액체로켓 엔진의 비선형 해석 모델의 개발," KARI-RET-TM-2009-008,
- 3 J.B. Kidd, T.E. Edgerton and C.F. Chen, "Transfer Function Synthesis in the Time Domain - An Extension of Levy's Method," IEEE Transactions on Education, Vol. E-8, Nos. 2-3, 1965
- 4 E.C. Levy, "Complex-curve fitting," IRE Trans. Automatic Control, vol. AC-4, pp. 37-43, May 1959