

회절제한시스템에 속한 빛의 3원색의 변조전달함수 해석에 관한 연구

최규식* 장원석*

*건양대학교

A Study on the MTF Analysis for the Three Primary Colors of Light within
Diffraction-Limited System

Kyu-Shik Che * Won-Seok Chang *

*Konyang University

요약

문명이 발달함에 따라 물체를 정확하게 표현하기 위한 광학시스템도 비약적으로 발전하고 있다. 이러한 광학시스템의 성능을 평가하는 하나의 중요한 방법으로서 변조전달함수가 도입되었다. 그러나 실제로 변조전달함수를 구하려면 지루하고도 더딘 과정을 거쳐야 한다. 본 논문에서는 회절제한시스템의 범위에 속하는 영상시스템에서 빛의 3원색인 적색, 녹색, 청색에 대한 변조전달함수를 구하여 그래프로 표시하였다.

Abstract

The optical system develops remarkably as well as the development of civilization. The modulation transfer function(MTF) was introduced as one of the important estimation methods to estimate the performance of optical systems. The calculation of MTF is very boring and tiresome. We express the MTF curves three primary colors of light in the diffraction-limited systems.

키워드 : 변조전달함수 광학전달함수 공간주파수 수차 구경

1. 서론

광학기기에서 렌즈의 특성을 평가하는 방법으로 가장 많이 사용되는 것이 MTF(Modulation Transfer Function) 측정법이다. 특히 방사선계에서의 MTF는 입력으로서 X선 강도를 정현파의 패턴으로 사용할 수 있고 공간주파수에서 정현파의 조밀성 표시가 높아서 농도반복시간이 좁다는 특징이 있다 즉, 주파수가 높아서 주기가 짧아 작은 피사체도 촬영하는 것이 가능하다. MTF를 이용하면 이 방사선 영상들의 해상특성을 평가할 수 있다 즉, 최종영상의 해상특성 뿐만 아니라 촬영된 영상의 추측도 가능하다는 의미이다.

렌즈 제조회사들은 자체적으로 MTF 수치를 측정해 발표하고 있으며, MTF 차트를 객관적으로 측정하고 있는 기관에서도 각 제조사별 렌즈의 MTF 수치를 확인할 수 있다. 그러나 MTF 차트는 렌즈의 성능을 쉽게 알아볼 수 있는 자료임에도 불구하고 복잡한 그래프와 용어 등으로 인해 많은 사람들이 해석에 어려움을 느끼고 있다. 특히, 변조전달함수를 계산하여 그래프로 구현한다는 것이 매우 어려워져 도출된 방정식에 필요한 데이터를 일일이 대입하여 그 값을 구한 후 이들을 이용하여 그래프를 구하는 것이 일반적이다. 이런 과정에서 많은 노력이 필요할 뿐만

아니라 일반화된 그래프의 작성법이 없어서 영상기기의 특성을 해석하는 데에 어려움이 많다

따라서 본 논문에서는 회절한계에 속하는 광학시스템에서 대표적인 값으로서 빛의 3원색인 적색, 녹색, 청색에 대한 변조전달함수를 계산하여 그래프로 표시하였다. 2항에서는 광학전달함수 및 변조전달함수의 정의 및 특성에 관하여 여러 방면에서 본 특성을 연구한다. 3항에서는 정현파형에 대한 MTF를 연구한다. 4항에서는 회절제한시스템의 영상콘트라스트를 5항에서는 회절제한시스템의 MTF를 검토한다. 6항에서는 제안된 방정식에 의하여 실제적으로 빛의 3원색에 대한 MTF를 구하여 그래프로 구현한다

2. OTF 및 MTF

광학시스템을 평가하는 중요한 개념으로서 광학전달함수(optical transfer function ; OTF)라는 것이 있어서 이것을 공간주파수의 함수로 그렸을 경우 표본콘트라스트 대비 영상콘트라스트의 비율을 나타낸다 이때 실제 영상과 이상적인 영상이 점유한 위치 사이의 위상차를 고려해야만 한다 광학전달함수는 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다

$$OTF = MTF \times e^{j\phi} \quad (1)$$

여기서 MTF는 변조전달함수(modulation transfer function)이고, 허수부분은 위상전달함수(phase transfer function ; PTF)로서 위상위치의 변화를 공간주파수의 함수로 표현하는 것이다 그러므로 광학 전달함수는 공간주파수에 의존하는 복소변수로서 그 계수(modulus)는 변조전달함수(MTF)이며 위상은 위상전달함수(PTF)가 된다. 위상전달함수가 주파수에 따라 선형으로 변하면 이는 단순히 영상의 측면변위를 나타내며, 기하구조적인 왜곡과 같은 수차를 가진 것에서 관찰되는 것과 같다

공간주파수(spatial frequency)란 표본의 단위간격당 공간의 수이다. 이는 흔히 표본에서 볼 수 있는 주기적인 간격(공간주기)이라는 정량적인 항으로 표시한다. 공간주파수에 관한 공통적인 기준단위는mm당 선쌍의 수이다. 예로서 쌍당 1μm를 측정하는 공간주파수를 가진 일련의 흑백선이라는 것은 매mm 당 1000회를 반복함으로써 mm당 1000회의 선을 가진 공간주파수와 동일하다[1].

표본이 동일한 폭을 가지는 흑백교차선(직각파)으로 구성된 주기적인 선격자인 상황에서는 영상으로 전달되는 표본의 콘트라스트의 비율과 관련된 그래프는 콘트라스트전달함수contrast transfer function ; CTF)이다. 대부분의 표본은 직각파 형태인 명확하게 구분되는 단면 대신 상이한 공간주파수를 가진 정현적으로 가변 강도로 구성된다 이 경우에 신호(공간) 주파수 대비 입력강도의 비율과 관련된 출력관련 그래프는 변조전달함수와 유사하다 공간주파수가 아주 큰 값으로 도달하게 되면 직각파의 응답은 정현파와 닮아가서 실제로 동일한 콘트라스트 전달함수와 변조전달함수를 만들게 된다

MTF의 특수한 장점으로서의 총합적인 MTF를 얻기 위해 두 개 이상의 소자의 MTF를 단순히 곱하기만 하는 직렬로 해도 목적을 이룰 수 있다는 것이다 예를 들어서 mm당 20사이클에서 0.5라는 MTF를 갖는 카메라렌즈가 이 주파수에서 0.7이라는 MTF를 가진 필름을 사용한다고 하면 결합MTF는 0.5×0.7=0.35가 된다. 이 카메라로 찍은 물체가 0.1이라는 콘트라스트(변조)를 갖고 있다면 영상변조는 0.1×0.35=0.035로서 시각검출한계치에 근접한다[1].

그러나 MTF가 직접 “결합된” 즉, 어떤 종류의 확산기를 써도 분리되지 않는 렌즈와 같은 광학소자 사이에서는 결합된 직렬화가 되지 않는다는 것에 유의해야 한다. 이는 어느 한 소자의 수차(aberration)가 다른 소자의 수차를 보상하기 때문이며 따라서 이 결합 소자가 각 소자들의 영상품질보다 더 우수한 영상 품질을 생성하기 때문이다 어떠한 “교정” 광학 시스템을 이용해도 이러한 점을 예시해줄 수 있다

3. 정현파의 MTF

앞에서 검토한 것은 휘도분포가 “직각파형”이며 영상조도분포가 광학시스템의 특성 때문에 왜곡되거나 “둥그름”한 파형에 근거한 것이었다 그러나 물체의 파형휘도분포가 정현파이면 영상의 분포는 확산함수의 모양에 관계없이 정현파로 서술된다 이러한

특성때문에 렌즈시스템의 성능을 서술하기 위한 변조전달함수(modulation transfer function ; MTF)를 광범위하게 적용할 수 있다 이때 변조전달함수(MTF)는 정현파의 주파수(단위길이당 사이클)의 함수로서 물체 대비 영상의 비율이다[2,3,4,5,6,7].

$$MTF(v) = \frac{M_i}{M_o} \quad (2)$$

여기서 M_i 는 영상의 변조도, M_o 는 물체의 변조도이다. 주파수 v 에 대해 MTF 그림을 그리면 영상형성 시스템의 성능을 범용적으로 측정할 수 있으며 따라서 렌즈에서 뿐만 아니라 필름 인광체(phosphor), 영상관, 눈 및 심지어 카메라를 장착한 항공기와 같은 완성시스템에도 사용할 수 있다

MTF는 주파수 응답, 정현파응답, 콘트라스트전달(contrast transfer)로 언급되어 왔다. 여현(또는 정현) 함수에 따라 휘도(밝기, 광채)가 변하는 명암교차띠로 구성된 물체를 가정해보면 휘도분포는 수학적으로 아래의 식과 같이 표현할 수 있다

$$G(x) = b_0 + b_1 \cos(2\pi vx) \quad (3)$$

여기서 v 는 단위길이당 사이클의 휘도변화주파수이고 $(b_0 + b_1)$ 은 최대휘도, $(b_0 - b_1)$ 은 최소휘도이다. 그리고 x 는 띠에 수직인 공간좌표이다. 이 파형의 변조는

$$M_0 = \frac{(b_0 + b_1) - (b_0 - b_1)}{(b_0 + b_1) + (b_0 - b_1)} = \frac{b_1}{b_0} \quad (4)$$

이다. 이 라인파형을 광학시스템으로 영상화할 때는 물체의 각점이 번짐으로 영상화된다. 우리는 이제 편 의상 식(3)의 차원 x 와 $(1/v)$ 가 영상에 대응하는 차원이라 가정한다 위치 x 에서의 영상에너지분포가 $G(x)$ 와 $A(t)$ 를 곱한 합이라는 것이 명백하므로 다음과 같이 콘벌루션으로 표현할 수 있다[8].

$$F(x) = \int A(t)G(x-t)dt \quad (5)$$

4. 회절제한시스템의 영상콘트라스트

회절제한 광학시스템에서 표본의 공간주파수가 증가할 때 영상의 콘트라스트가 어떻게 감소되는가를 관찰해보자. 회절제한광학현미경의 영상콘트라스트에서 공간주파수를 증가시킬 때 어떠한 영향이 있을 것인가를 보여주는 그림을 그림에서 예시하였다. 그림의 좌측에 흑백교차직각파대기로 구성된 주기적 선격자(100% 콘트라스트)가 두 개의 공간주파수에서 표시되었다. 현미경에서 형성된 최종영상은 각 기기의 우측에 보였으며 콘트라스트가 감소되어 정현적인 강도로 나타나고 기기 콘트라스트의 상대적인 비율로 영상 밑에 그렸다

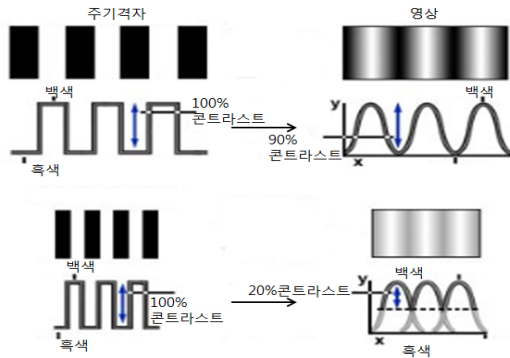


그림 1 변조 및 콘트라스트 전달함수

입력이 그림 1에서 예시한 바와 같은 주기적 격자타켓인 콘트라스트가 높은 직각파이면 콘트라스트전달함수에 의하여 콘트라스트의 전달이 결정된다 그러나 현미경으로 관찰하게 되는 대부분의 표본은 그러한 일정한 주기성을 보이지는 않으며 마이크로 이하의 레벨에서 그 정도가 변하는 정현적인 직각파로 구성된다. 이 경우에 변조전달함수는 표본으로부터 현미경이 생성하게 되는 영상으로 콘트라스트가 전달되는 것을 계산하는 데에 쓰인다

5. 회절한계시스템의 MTF

앞항에서는 순수한 기하구조적 향으로 MTF를 검토했다. 상기에서 설명한 기법은 수차가 큰 경우에만 적용할 수 있다 수차가 적어지면 시스템의 구경의 회절효과와 수차 사이의 반응이 매우 복잡해진다 수차가 없다면 시스템의 MTF는 회절파형의 크기와 관계를 맺어서(이는 시스템의 수치적 구경과 사용되는 광선의 파장함수이다) 다음과 같이 주어진다[8,9].

$$MTF(v) = \frac{2}{\pi}(\phi - \cos\phi \sin\phi) = \frac{1}{\pi}(2\phi - \sin 2\phi) \quad (6)$$

여기서

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda v}{2NA}\right) \quad (7)$$

이고 v 는 mm당 사이클주파수, λ 는 mm로 표시되는 파장, NA 는 수치적인 구경($N \sin U'$)[3]이고 $\cos^{-1}(x)$ 는 여현값이 x 가 되는 각이다. ϕ 가 0이면 $MTF(v)$ 가 0이 된다는 것이 명백하다 그러므로 수차가 없는 시스템에 대한 "한계분해능"은 종종 차단주파수(cutoff frequency)라고도 하며 다음과 같이 나타낸다[8,9].

$$v_o = \frac{2NA}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(f/\#)} \quad (8)$$

여기서 λ 는 mm, $f/\#$ 는 시스템의 상대구경 v_o 는 mm당 사이클이다. 이 식(8)은 구형구경(circular aperture)에 적용할 수 있다 이러한 관계를 이용하면 식(6)은 다음과 같이 표현할 수 있다

$$MTF = \frac{2}{\pi} \left\{ \phi - \frac{v}{v_o} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_o}\right)^2} \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \cos^{-1}\left(\frac{v}{v_o}\right) - \frac{v}{v_o} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_o}\right)^2} \right\} \quad (9)$$

임의의 형태를 가진 구경인 경우 회절MTF는 구경과 구경변위에 공통적인 정규화면적과 동일하다 그러므로 식(6)은 반경이 R 인 두 원의에 공통부분인 정규화면적이다. 왜냐하면 그림 2에서 알 수 있는 바와 같이 두 원의 중심이 $2Rv/v_o$ 만큼 떨어져있으므로 겹치는 호의 정규화면적은

$$2\left(\pi R^2 \times \frac{2\phi}{2\pi} - \frac{1}{2} \frac{2Rv}{v_o} \times R \sin 2\phi\right) / \pi R^2$$

$$= \frac{2}{\pi} (\phi - \cos\phi \sin\phi)$$

이기 때문이다. 따라서 직각구경인 경우는 MTF가 직선이 된다. 차단주파수 v_o 는 해상도방향의 폭(즉, $f/\#$ 또는 NA)을 이용하여 식(8)로 계산한다.

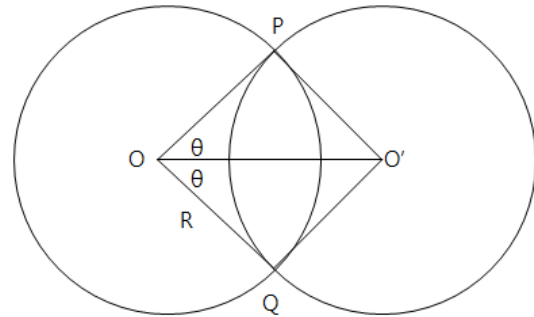


그림 2. 호의 면적과 MTF의 관계

무한초점시스템(또는 영상이 먼 거리에 있는 시스템인 경우) 차단주파수는 다음과 같다

$$v_o = D/\lambda \quad (10)$$

여기서 D 는 렌즈의 직경이다. 주파수크기는 방정식(8)에서 주어진 한계주파수인 v_o 를 이용하여 표시한다. 통상적인 시스템인 경우 이 성능레벨을 초과하지 못한다. 정교하게 교정된 렌즈를 이용하여 구한 광선 추적데이터(회절은 무시)로부터 유도된 기하구조적 MTF곡선은 때때로 한계치를 초과하기도 한다 물론 그러한 결과는 부정확한 것으로서 광선이라는 개념이 일부 전자기과의 방사 거동을 설명한다는 사실로부터 유도된 것이다.

6. 실례

일반적으로 빛의 3원색이라 일컫는 빨강,초록, 파랑색에 대해서 각각 대표파장 하나씩을 택하여 회절한계시스템의 변조전달함수곡선을 그리기로 한다 각각의 파장은 그림에서 보는 바와 같다 여기서 대표적인 값으로서 청색은 $450\text{nm}=0.00045\text{mm}$, 녹색은 $550\text{nm}=0.00055\text{mm}$, 적색은 $660\text{nm}=0.00066\text{mm}$ 를 취한다. 그리고 $NA=0.1\text{mm}$ 이라 가정한다

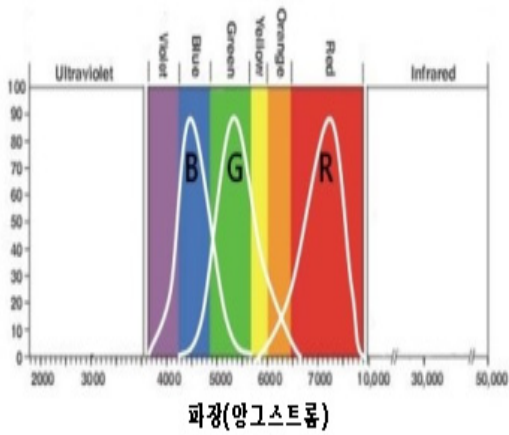


그림 3. 빛의 스펙트럼[10]

식(8) 및 (8)에 의해서 각 파장별로 변조전달함수를 구해보면 공간주파수에 따라서 단조감소하는 모형을 띠게 되며, 이 결과를 그림 4에 표시하였다. 이 그림에서 보듯 대상 중에서 파장이 제일 긴 적색이 제일 먼저 한계주파수에 이르게 되며 그 다음에는 녹색이 한계주파수에 이르게 된다 파장이 제일 짧은 청색의 한계주파수값이 제일 크다 여기서 계산은 하지 않았지만 적색보다 파장이 더 긴 적외선의 한계주파수는 더욱 더 작을 것이며 자외선인 경우는 제일 길 것이다.

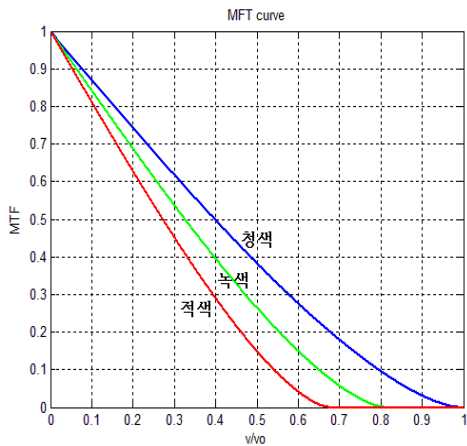


그림 4. 빛의 3원색의 회절제한 변조전달함수

7. 결론

광학시스템의 성능을 평가하는 하나의 중요한 방법으로서 변조전달함수가 도입되었다 그러나 실제로 변조전달함수를 구하려면 지루하고도 더딘 과정을 거쳐야 한다. 본 논문에서는 회절한계시스템의 범위에 속하는 영상시스템에서 빛의 3원색인 적색, 녹색, 청색에 대한 변조전달함수를 구하여 그래프로 표시하였다.

일반적으로 빛의 3원색이라 일컫는 빨강초록, 파랑

색에 대해서 각각 대표파장 하나씩을 택하여 회절한계시스템의 변조전달함수곡선을 그렸다 각 파장별로 변조전달함수를 구해보면 공간주파수에 따라서 단조감소하는 모형을 띠게 된다. 대상 중에서 파장이 제일 긴 적색이 제일 먼저 한계주파수에 이르게 되며 그 다음에는 녹색이 한계주파수에 이르게 된다 파장이 제일 짧은 청색의 한계주파수값이 제일 크다 여기서 계산은 하지 않았지만 적색보다 파장이 더 긴 적외선의 한계주파수는 더욱 더 작을 것이며 자외선인 경우는 제일 길 것이다

참고문헌

- [1] Kenneth R. Spring, Michael W. Davidson, "Modulation Transfer Function", Nikon Microscopy, the source for microscopy education.
- [2] <http://user.chol.com/~sloth/misc/mtf.html>, "Modulation Transfer Function Engineering", <http://user.chol.com/~sloth/misc/mtf.html>, 2011.09
- [3] 원바리, "의료영상의 평가방법", <http://blog.naver.com/ysdom/40008202063>, 920.
- [4] G. Lubberts, "The line spread-function and the modulation transfer function of x-ray fluorescent screen-film systems", Research Laboratories Eastman Kodak Company, vol.105, no.4, pp909-917
- [5] Optikos Corporation, "How to Measure MTF and other Properties of Lenses", Optikos Corporation, 1999.7
- [6] choalex@nate.com
- [7] Wikipedia, "Modulation transfer function(infrared imaging)", Wikipedia, the free encyclopedia.
- [8] Warren J. Smith, "modern optical engineering- the design of optical systems", McGraw-Hill, pp345-pp361, 1990
- [9] Wikipedia, "Numerical Aperture", Wikipedia
- [10] <http://blog.naver.com/hamjangs/40146307726>