

## 선형 감소 K-Best LSD 알고리즘

\*홍석철 \*\*이정우

서울대학교 전기컴퓨터공학부, 뉴미디어통신공동연구소

\*ikpuy@wspl.snu.ac.kr \*\*junglee@snu.ac.kr

## Linearly Decreasing K-Best List Sphere Decoding Algorithm

\*Hong, Seokchul \*\*Lee, Jungwoo

Seoul National University, Department of Electrical and Computer Engineering, INMC

## 요약

Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) 시스템의 복잡도를 감소시키는 방식은 실생활에서 MIMO 시스템을 활용하는 데에 있어 중요한 부분이다. 널리 사용되는 Maximum Likelihood (ML) 복호기의 경우 낮은 에러율 (BER) 을 보여주지만 복잡도가 높다. 실생활에 활용하기 위하여 ML 복호기의 복잡도를 감소시킬 필요가 있고 이에 Sphere Decoding Algorithm (SDA) 이 제안되었다. 이를 발전시킨 List Sphere Decoding (LSD) 은 여러 종류가 있다. 그 중에 넓이 우선 탐색 방식인 K-Best LSD 알고리즘은 각 레이어에서 리스트의 크기가 복잡도와 밀접한 연관이 있다. 본 논문에서는 기존의 K-Best LSD 알고리즘에 기반하여 초기 반지름 설정 및 선형적으로 리스트 크기를 감소시키는 방식으로 K-Best LSD 알고리즘의 복잡도를 기존 알고리즘에 비해 크게 낮추면서도 비트 오류 성능 열화가 적은 알고리즘을 제안하고 전산 실험을 통해 이를 검증한다.

## 1. 서론

IEEE 802.11n (WiFi), Long Term Evolution (LTE), IEEE 802.16 (WiMax) 등을 비롯한 현대 무선통신에서는 디지털 송수신에 있어서 높은 멀티플렉싱 계인을 제공하는 Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) 시스템을 사용한다.[1] 이 시스템에서는 여러 개의 송신 안테나와 수신 안테나를 통해 데이터의 전송량을 늘리기 위해 spatial multiplexing 기법을 사용하게 된다. 여러 개의 송수신 안테나를 사용하기 때문에 데이터를 정확하게 복구하기 위한 수신기의 역할이 중요하다.

Maximum Likelihood (ML) 수신기는 에러 확률을 최소화할 수 있지만 복잡도가 높다고 알려져 있다. 이에 ML 수신기의 복잡도를 낮추고 ML 수신기의 최적에 근접한 성능을 내는 Sphere Decoding (SD) 기법이 제안되었다.[2] SD는 트리 검색을 특정 반지름을 가진 구 내부로 제한하여, 구 외부에 존재하는 노드와의 유클리드 거리를 계산하지 않는 기법으로 ML과 비교하여 복잡도가 감소된다. 이러한 장점을 바탕으로 SD를 발전시킨 List Sphere Decoding (LSD) 이 제안되었다. LSD 복호기는 SD 복호기가 단 하나의 심볼 벡터를 검출하는 것과는 달리 여러 개의 심볼 벡터와 그 들의 유클리디언 거리의 리스트를 출력으로 갖는다. 리스트의 크기가 커지면 비트 오류 (BER) 은 줄어들지만 복잡도가 늘어나는 트레이드 오프 관계가 있다.

LSD 알고리즘을 구현하는 데에 여러 방법이 있다. 넓이 우선 검색 방식의 K-best LSD, 깊이 우선 검색 방식의 Schnorr-Enchner Enumeration (SEE) LSD, 매트릭 우선 검색 방식의 Increasing Radius (IR) LSD 등이 존재한다. [3] K-best LSD 알고리즘을 사용할 때는 리스트의 크기가 복잡도와 밀접한 연관이 있다. 리스트의 크기가

줄어들수록 복잡도 역시 줄어들게 된다.

본 논문에서는 상위 레이어로 진행할 때마다 리스트의 크기를 선형적으로 감소시키는 K-best LSD 알고리즘 (LDKBA) 을 초기 반지름 설정과 함께 사용하여 기존의 K-best LSD 알고리즘과 비교하였을 때 복잡도를 크게 낮추면서도 비트 오류의 성능 열화는 크지 않은 알고리즘을 제안하고, 기존의 K-best LSD 알고리즘과 비교하여 비트 오류율 전산실험을 통하여 성능과 복잡도를 측정한다.

본 논문은 아래와 같이 구성되어 있다. 2장에서는 ML 복호기와 LLR 계산을 통해 트리 검색 구조를 갖는 LSD 알고리즘에 대해 설명한다. 3장에서는 기존의 K-best LSD 알고리즘과 초기 반지름 설정을 통한 복잡도 감소 등을 설명하고 선형적으로 리스트 크기를 감소시키는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘의 비트오류 성능과 복잡도에 관한 전산실험 결과를 보여준다. 마지막으로 5장에서는 결론을 맺도록 한다.

## 2. LSD 알고리즘

## 가. List Sphere Decoding

$N_T$  개의 송신 안테나와,  $N_R$  개의 수신 안테나로 이루어진 MIMO 시스템을 생각해 보자( $N_T \geq N_R$ ). 이러한 MIMO 시스템의 수학적 모델은 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

$\mathbf{y}$ 는  $N_R \times 1$  수신 심볼 신호,  $\mathbf{x}$ 는  $N_T \times 1$  송신 심볼 벡터,  $\mathbf{H}$ 는  $N_R \times N_T$  채널 행렬,  $\mathbf{n}$ 은 AWGN잡음 벡터를 나타낸다. 이 때, Maximum Likelihood (ML) 복호기의 해는 아래와 같다.

$$\mathbf{x}^{ML} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}\| \quad (2)$$

ML 복호기의 경우, 송신 벡터  $\mathbf{y}$ 로부터 가능한 각각의 수신 벡터  $\mathbf{x}$  중 거리가 가장 가까운 심볼 벡터  $\mathbf{x}^{ML}$ 를 검색한다. 이 때, 가능한 모든 벡터의 경우의 수는 아래와 같다.

$$N_S = 2^{Q \cdot N_T} \quad (3)$$

$Q$ 는 안테나에서의 심볼 당 비트 수로, 가능한 심볼의 경우의 수는  $2^Q$ 가 된다. 따라서 비트 수가 증가하거나, 송신 안테나 수가 증가함에 따라 기하급수적으로 증가하게 된다. ML 복호기는 이러한 모든 경우의 수를 검색해야 하므로 검색시간이 오래 걸리게 된다. 이에 SD는 ML의 검색 시간을 줄이기 위해 제안되었다. SD는 ML 복호기를 탐색 반지름을 갖는 트리 검색 구조로 변형시킨다. 탐색 반지름  $r$ 에 대해 다음의 식이 성립한다.

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}\| < r^2 \quad (4)$$

채널 행렬  $\mathbf{H}$ 를 QR decomposition을 사용하여 분해한 후 (4)를 다시 써보면 아래와 같다.

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{(N_R - N_T) \times T} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\|\mathbf{y} - [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}\|^2 < r^2 \quad (6)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^H \\ \mathbf{Q}_2^H \end{bmatrix} \mathbf{y} - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \right\|^2 < r^2 \quad (7)$$

$$\|\mathbf{Q}_1^H \mathbf{y} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|\mathbf{Q}_2^H \mathbf{y}\|^2 < r^2 \quad (8)$$

(8)의 좌변에서 두 번째 항은 채널과 수신신호에 의해 고정된 항이므로 유효반지름  $r'$ 을 아래와 같이 정의 할 수 있다.

$$r'^2 \equiv r^2 - \|\mathbf{Q}_2^H \mathbf{y}\|^2 \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_1^H \mathbf{y} \quad (10)$$

(10)을 이용하여 새로운 ML 복호기의 해를 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}^{ML} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{R}\mathbf{x}\| \quad (11)$$

(11)에서 상삼각행렬  $\mathbf{R}$ 의 가장 아래 행인  $N_T$ 번째 행부터 메트릭 연산을 하게 되면, 가장 아래 행에 대해 오직 한 번의 연산만 하면 된다. 나머지 행의 연산들은 부분 유클리디언 거리  $d_{N_T-1}=0$ 으로 고정 시킨 후 부분 유클리디언 거리 (PED)  $d_i$ 와 거리 증분 (DI)  $e_i$ 을 통하여 재귀적으로 계산할 수 있다.

$$d_i = d_{i+1} + |e_i|^2, \quad i = N_T, N_T - 1, \dots, 1 \quad (12)$$

$$|e_i|^2 = \left| \tilde{y}_i - \sum_{j=i}^{N_T} \mathbf{R}_{i,j} x_j \right|^2 \quad (13)$$

거리 증분은 트리 검색에서의 가치와 관련이 있고 부분 유클리디언 거리는 노드들과 관련이 있다. 트리 내의 각각의 노드들은 특정한 송신 심볼 벡터 집합에 해당하고 거리 메트릭을 포함하고 있다.

LSD 복호기는 모든 암호화된 비트에 대한 LLR 값의 계산을 필요로 한다. 이 때, 복잡도를 낮추기 위하여 max log approximation을 도입한다.[4]

$$L(b_n) = \min_{x|b_n=0} \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{R}\mathbf{x}\| - \min_{x|b_n=1} \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{R}\mathbf{x}\| \quad (14)$$

$b_n$ 은 송신된 심볼 벡터의  $n$ 번째 비트를 의미한다. 한 심볼 벡터의 총 비트 수  $N_b = Q \cdot N_T$ 가 된다. 각각의 비트에 대하여 (14)의 두 최소값 중의 하나는 SD를 통하여 구한 maximum likelihood distance  $\lambda^{ML}$ 이 된다. 주어진  $\lambda^{ML}$ 에 대하여 나머지 최소값을 구하기 위해서는 모든  $N_b$ 에 대해 SD를 통하여 계산을 해야 한다. 이 다른 하나의 최소값을 counter hypotheses distances  $\lambda^{CH}$ 라 부른다.[5]

$$L(b_n) = \begin{cases} \lambda^{ML} - \lambda_n^{CH}, & b_n^{ML} = 0 \\ \lambda_n^{CH} - \lambda^{ML}, & b_n^{ML} = 1 \end{cases} \quad (15)$$

### 3. LD K-Best LSD 알고리즘

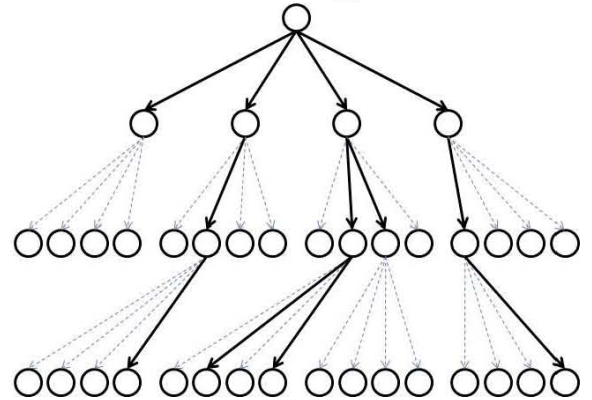


그림 1 K-Best LSD 알고리즘 개요도, K=4

#### 가. 적응적 K-Best LSD 알고리즘

K-Best 알고리즘 (KBA)은 깊이 우선 탐색이 아닌 넓이 우선 탐색을 적용한다. 각 레이어에서 부분 유클리디언 거리가 작은 K 개의 노드들만 선택하여 다음 레이어로의 탐색을 진행한다. KBA는 SD의 관점에서 볼 때, 마지막 레이어까지 단 한 번만 도달하게 되므로 트리 검색 반지름이 고정되는 것을 의미한다. 따라서 적절한 반지름을 설정하는 것이 중요하다.

최초의 반지름은 1-Best 알고리즘으로 검출한 송신 벡터의 유클리



디언 거리를 사용한다.[6] 즉, 각 레이어에서 최소의 부분 거리를 지닌 하나의 노드를 선택해 나가는 방식의 알고리즘을 사용하여 최초의 방문 거리를 설정한다. 이 방문 거리를 도입하여 ML 해와 거리가 먼 벡터들을 소거할 수 있다. 최초의 방문 거리는 아래의 식으로 구할 수 있다.

$$r_{init} = \sum_{i=N_T}^1 \left| \tilde{y}_i - \sum_{j=i}^{N_T} \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{x}_j^{1BA} \right|^2 \quad (16)$$

나. LD K-Best LSD 알고리즘

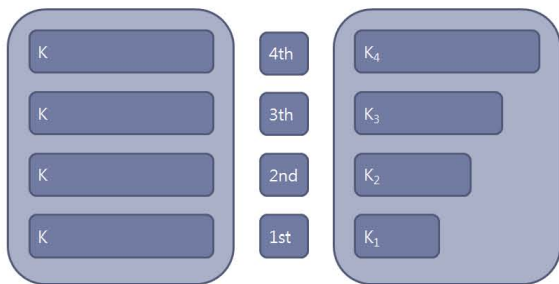


그림 2 4X4 MIMO 시스템에서 KBA 와 LDKBA의 비교

기존의 KBA의 경우 모든 레이어에서 K개의 노드를 탐색하게 된다. 방문한 노드 수는 복잡도와 직접적으로 연결이 되어 있으므로 방문한 노드를 줄일수록 복잡도는 감소하게 된다. 방문 노드를 줄이는 방법으로는 상위 레이어의 노드 수를 줄이는 방식과 하위 레이어의 노드 수를 줄이는 방법 두 가지를 생각할 수 있다. 하지만 하위 레이어의 노드 수를 감소시키게 되면 ML 복호기의 해와 가까운 심볼 벡터를 찾지 못할 확률이 증가하게 된다. 따라서 상위 레이어의 노드 수를 감소시키는 방법으로 복잡도를 감소시킬 수 있다. 이에 선행적으로 K의 값을 감소시켜 나가는 선행적 감소 K-Best LSD (LD K-Best LSD) 알고리즘을 제안한다.

적응적 KBA를 사용한 경우를 가정하면, 방문한 노드의 최대값은 기존의 KBA의 경우 아래와 같다.

$$n_{KBA} = K \times N_T \quad (17)$$

반면 LD K-Best LSD 알고리즘을 사용한 경우 방문한 노드의 최대값은 아래와 같다.

$$n_{LDKBA} = \sum_{i=1}^{N_T} K_i \quad (18)$$

위의 식들을 통하여 각 레이어에서의 방문한 노드 수를 적절히 설정하면 복잡도의 감소를 얻을 수 있음을 예상할 수 있다.

4. 성능 분석

오류율과 복잡도, 두 가지 측면에 대하여 성능을 분석하고자 한다. 전산실험에서 64QAM, 4X4 MIMO 시스템을 가정하였으며, K-Best LSD 알고리즘에서는 K=16을 사용했다. 제안된 LD K-Best LSD 알고리즘에서는 각 레이어마다 [16 12 8 4]로 감소하는 리스트 크기를 사

용하였다.

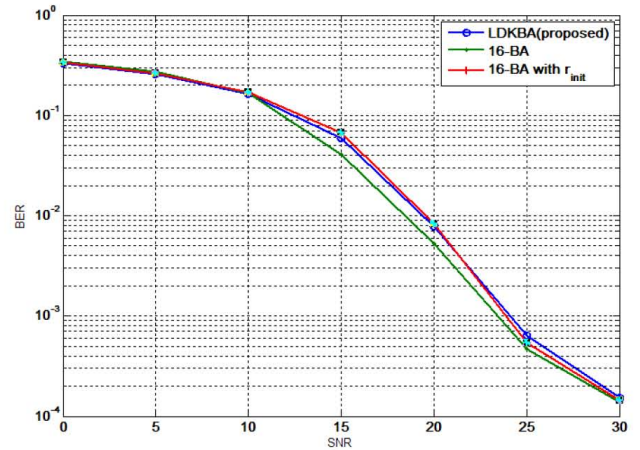


그림 3 제안된 알고리즘의 BER 성능 비교

비트 오류 측면에서 전통적인 KBA와 적응적 KBA, LDKBA를 비교하였을 때, 10<sup>-3</sup> BER에서 약 1dB 정도의 차이를 보인다. 적응적 KBA와 LDKBA를 비교하였을 때는 동일한 BER에서 0.1dB 이내의 거의 동일한 성능을 가짐을 살펴 볼 수 있다.

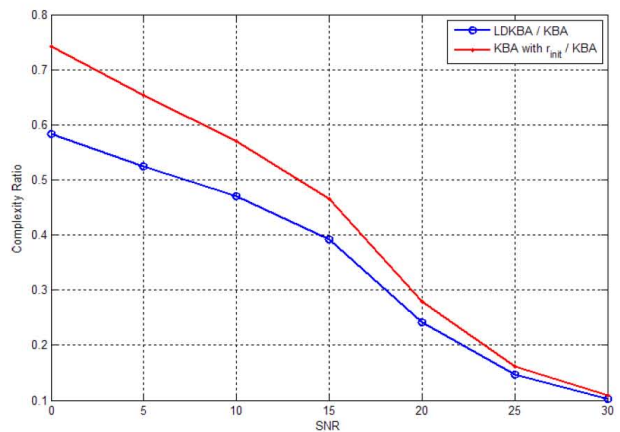


그림 4 트리 탐색 시 평균 방문 노드 수 비율

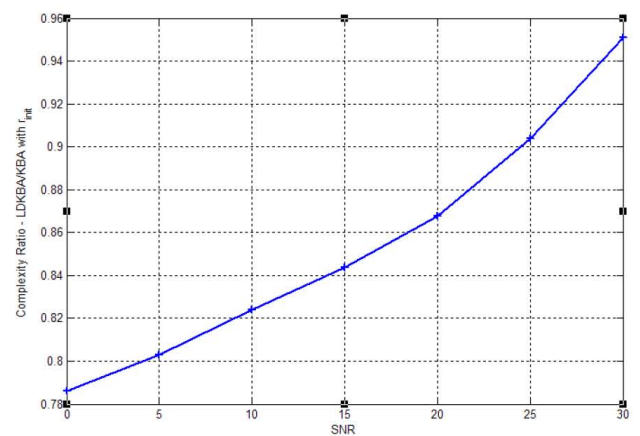


그림 5 트리 탐색 시 평균 방문 노드 수 비율 -LDKBA/적응적 KBA

복잡도 측면을 알아보기 위해 복잡도와 밀접히 관련되어 있는 트리 탐색 시 평균 방문 노드 수를 비교한다. 전통적 KBA와 비교하였을 때,

적용적 KBA는 훨씬 낮은 복잡도를 지니게 된다. SNR이 30dB일 때, 10% 정도의 평균 방문 노드 수를 가지게 되는 것을 알 수 있다. LDKBA의 경우, 적용적 KBA보다 더 적은 평균 방문 노드 수를 지니게 되는데 이를 더 자세히 살펴보면 그림 5와 같다. 적용적 KBA와 비교하였을 때, LDKBA는 0dB의 SNR에서 약 78% 정도의 복잡도를 갖고, SNR이 증가함에 따라 복잡도 역시 증가하게 된다. 이를 통하여 모든 구간에 걸쳐 복잡도 측면에서 이득이 있지만 특히 낮은 SNR일수록 복잡도 측면에서 더 큰 이득을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

## 5. 결론

제안된 LD K-Best LSD 알고리즘은 전통적 K-Best LSD 알고리즘과 비교하였을 때 비트 오류 측면에서  $10^{-3}$  BER에서 약 1dB의 성능 열화를 보이지만 복잡도를 최대 90% 까지 줄일 수 있다. 적용적 K-Best LSD 알고리즘과 비교하였을 때 비트오류 측면에서 0.1dB 이하의 거의 같은 성능을 보이는 한편 복잡도는 최대 22% 까지 줄일 수 있다. 각 레이어마다 방문하는 노드 수를 줄이는 데에 있어서 선형적인 방법 이외의 다른 방법에 대한 연구가 추가적으로 필요하며, 신뢰성과 복잡도 사이의 트레이드 오프 특성에 관한 연구 역시 추가적으로 필요하다.

## ACKNOWLEDGMENT

이 연구는 한국연구재단의 일반연구자(2010-0013397) 지원 사업, 중견연구자 (2010-0027155) 지원 사업, 한국 에너지 기술평가원 (KETEP) (No. 2011T100100151), INMC와 BK21의 지원을 받아 수행한 연구입니다.

## 참고 문헌

- [1] E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," *AT&T Bell Labs. Internal Tech. Memo.*, June 1995.
- [2] U. Fienke and M. Pohst, "Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis," *Math Comput.*, vol.44, no.5, pp. 463-471, May 1985.
- [3] M. Myllylä, M. Juntti and J.R. Cavallaro, "Implementation aspects of list sphere detector algorithms," in *GLOBECOM '07. IEEE*, pp. 3915-3920, Dec. 2007.
- [4] B. M. Hochwald and S. ten Brink, "Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel," in *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no.3, pp. 389-399, Mar. 2003.
- [5] C. Studer, M. Wenk, A. Burg and H. Bölcskei, "Soft-output sphere decoding: Performance and implementation aspects," in *Fortieth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 2071-2076, Nov. 2006.
- [6] M. Mayer, M. Simko and M. Rupp, "Soft-output sphere decoding : Single tree search vs. improved k-best," in *Systems, Signals and image Processing, 2011 18th International Conference on*, Jun. 2011.