

축 하중을 받는 전단변형 회전체의 동적 안정성 Dynamic Stability of Shear-flexible Rotor under Axial Loads

#임경빈¹

#K. B. Yim(kbyim@dongyang.ac.kr)¹

¹동양미래대학교 기계공학부

Key words : Dynamic stability, Shear deformation, Axial force, Transfer matrix method

1. 서론

많은 연구자들은 축 하중을 받는 회전체의 안정성 연구에서 축의 전단변형을 고려하지 않았지만 Ku와 Chen¹은 축 하중을 받는 회전축의 지배 방정식을 유도할 때 Timoshenko 이론을 적용하여 전단변형을 포함하였고, Sheu와 Chen²은 회전축의 전단변형이 주기적인 축 하중을 받는 외팔형 회전체의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 본 논문에서는 축 하중과 전단변형을 포함하는 전이행렬식을 전개하여 축 하중을 받는 외팔형 회전체와 양 끝단이 단순 지지된 회전체의 동적 안정성을 해석함에 있어 전단변형을 고려하였다.

2. 전이행렬 전개

n번째 거소의 관성전이 함수를 행렬식으로 표현하면

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ \psi_x \\ \psi_y \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s^2 m & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s^2 m & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 I_t & s\Omega p & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s\Omega p & s^2 I_t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \psi_x \\ \psi_y \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{n+1}^L$$

보다 간략히 표현하면

$$\{X\}_n^R = [T_m]_n \{X\}_n^L \quad (1)$$

Fig.1에 근거한 관계식을 이용하여 축 요소에 대한 전이함수를 행렬식으로 표현하면

$$\{X\}_{n+1}^L = [T_s]_n \{X\}_n^R \quad (2)$$

또는

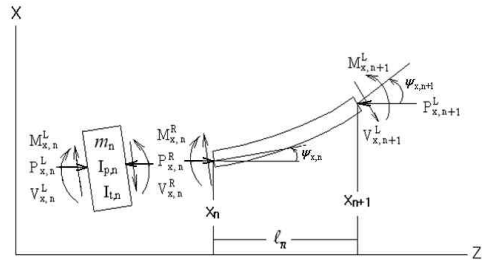


Fig. 1 Sign convention for the nth section

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ \psi_x \\ \psi_y \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{n+1}^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 & C_{17} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} & 0 & C_{28} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 & C_{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} & 0 & C_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{73} & 0 & C_{75} & 0 & C_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{84} & 0 & C_{86} & 0 & C_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \psi_x \\ \psi_y \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_n^R$$

$$C_{13} = C_{24} = C_{75} = C_{86} = \frac{\xi \ell}{k} \sin k \quad \text{where } \xi = \frac{A_s G}{A_s G - P}$$

$$C_{15} = C_{26} = \frac{\ell}{P} \left(1 - \frac{\xi}{k} \sin k \right), \quad C_{17} = C_{28} = \frac{1}{P} (1 - \cos k)$$

$$C_{33} = C_{44} = \xi \left(\cos k - \frac{P}{A_s G} \right), \quad C_{35} = C_{46} = \frac{\xi}{P} (1 - \cos k)$$

$$C_{37} = C_{48} = \frac{k}{P \ell} \sin k, \quad C_{15} = C_{26} = \frac{\ell}{P} \left(1 - \frac{\xi}{k} \sin k \right)$$

$$C_{17} = C_{28} = \frac{1}{P} (1 - \cos k), \quad C_{33} = C_{44} = \xi \left(\cos k - \frac{P}{A_s G} \right)$$

축 요소와 질량요소를 포함하는 i 번째 거소에 대한 전이행렬은 식(3)과 같고, 따라서 거소 n의 상태벡터는 거소 1의 상태벡터로 식(4)와 같이 표현될 수 있다.

$$[T]_i = [T_s]_i [T_m]_i \quad (3)$$

$$\{X\}_n^L = [T]_{n-1} [T]_{n-2} \cdots [T]_2 [T]_1 \{X\}_1^L = \prod_{i=n-1}^1 [T]_i \{X\}_1^L \quad (4)$$

3. 수치 해석

전개한 전이행렬식으로 해석한 결과의 타당성을 검사하기 위하여 축 방향 힘 $P=0.1\pi^2 EI/\ell^2$ 을 받는 단순 지지된 균일축의 고유 진동수를 산출하였다. 이를 참고문헌³의 해석 결과와 비교하였을 때 상호간의 최대 오차가 0.05% 미만으로 좋은 일치를 보였다. Fig. 2는 전단변수 $S(=EI/A_sG\ell^2)$ 의 값이 0.05일 때 축 방향 하중이 외팔형 회전체의 휘돌림 주파수에 미치는 영향을 보여준다. 휘돌림 주파수는 축 하중의 증가와 더불어 감소하며 전단 변형을 고려하지 않았을 경우에는 첫째 backward 휘돌림 주파수(1B)가 빔의 정적 좌굴 하중인 $P=2.47EI/\ell^2$ 에서 0이 되었다. 축 하중을 더 증가시키면 새로운 forward 휘돌림 주파수(1F)가 나타나서 두 번째 forward 주파수(2F)와 $P=2.58EI/\ell^2$ 에서 합쳐지고 그 이후에는 계가 flutter 형태로 불안정하게 된다. 전단변형을 고려하면 유사한 현상이 낮은 주파수와 축 하중에서 나타나서 첫째 backward 주파수(1B)는 $P=2.22EI/\ell^2$ 에서 0이 되고 두 개의 forward 주파수는 $P=2.30EI/\ell^2$ 에서 합쳐진다.

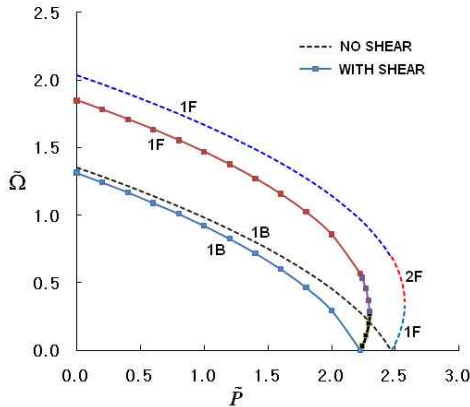


Fig. 2 Effect of the axial force on the whirl frequencies of an overhung rotor

Fig. 3은 Jeffcott 회전체와 같이 양 끝단이 단순 지지되고 회전원판이 중앙에 위치한 회전체가 전단변수 $S=0.05$ 의 값을 가질 때 축 방향 하중이 계의 첫 번째 고유 주파수에 미치는 영향을 나타낸다. 앞의 경우에서와 같이 축 방향 하중과 전단 변형은 계의 고유 주파수를 감소시킨다. 하지만 외팔형 회전체와는 다르게 자이로스콕프 효과가 미미하여 첫 번째 주파수가 2개의 휘돌림 주파수로 분리되

지 않았다. 이는 축 중앙에 위치한 회전원판이 계의 첫 번째 모드에서 수평축과 수직을 유지하기 때문이다.

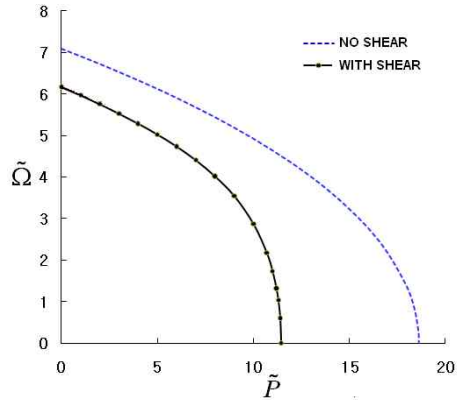


Fig. 3 Effect of the axial force on the first natural frequency of a simply supported rotor

4. 결론

축의 전단변형을 고려한 전이행렬식을 전개하여 축 방향 하중이 외팔형 회전체와 양단이 단순 지지된 회전체의 동적 안정성에 미치는 영향을 조사하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 축 하중을 받을 때 전단변형이 계의 동적 안정성에 미치는 영향은 외팔형 회전체보다는 양 끝단이 지지되는 회전체 형태에서 크게 나타났다.

둘째, 전단변형은 축 하중을 받는 회전체의 안전을 위한 임계값을 감소시키므로 축의 전단변형이 상대적으로 큰 회전체의 안정성 확보를 위하여서는 반드시 전단변형을 고려하여야 한다.

참고문헌

1. Ku, D. and Chen, L., "Stability and Whirl Speeds of Rotating Shaft under Axial Loads," International J. of Analytical and Experimental Modal Analysis, 9(2), 111-123, 1994
2. Sheu, H.-C. and Chen, L.-W., "A Lumped Mass Model for Parametric Instability Analysis of Cantilever Shaft-Disk Systems," J. of Sound and Vibration, 234(2), 331-348, 2000
3. Attard, M. M., Lee, J. S. and Kim, M. Y., "Dynamic stability of Shear-flexible Beck's Columns based on Engesser's and Haringx's Buckling Theories," J. of computers and Structures, 86, 2042-2055, 2008.