

자기장을 받는 복합재료 원통셸의 동적특성 연구

Study on the Dynamic Characteristics of Composite Shells Subjected to an Electromagnetic Field

박상윤* · 김성균** · 최종운*** 송오섭†

Sang-Yun Park, Sung-Kyun Kim, Jong-Woon Choi and Ohseop Song

Key Words : Composite Laminated Shells(복합재료 적층 셸), Dynamic Characteristics(동적 특성), Electromagnetic Field(전자기장), Transverse Shear(횡 전단), Extended Galerkin Method(확장된 Galerkin 방법)

ABSTRACT

In this paper free vibration analysis of symmetric and cross-ply elastic laminated shells based on FSDT was performed through discretization of equations of motion and boundary condition. Model of laminated composite shells subjected to a combination of magnetic and thermal fields is developed. These coupled equations of motion are based on the electromagnetic equations (Faraday, Ampere, Ohm, and Lorenz equations) and thermal equations which are involved in constitutive equations. Dynamic characteristic of composite shells for change of magnetic fields is investigated.

기 호 설 명

B: 자속밀도 벡터,
E: 전계 벡터,
H: 자계 벡터,
J: 전류밀도 벡터,
f: 로렌즈 힘 벡터,
 U_i, u_i : 직교 좌표 방향 3D, 2D 변위,
 β_1, β_2 : 횡전단 변위,
 Θ : 온도,
 L, R : 원통셸의 길이와 반경,
 N_L : 적층 개수,
 $\rho_0^{(k)}$: k 번째 층의 복합재료 밀도,
 $2h$: 원통셸의 두께,

θ : 섬유각

z_k : 원점에서 k 번째 층의 바닥까지 거리,

μ_0 : 진공 속에서의 투자율,

$$M_0[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} / N_L$$

$$M_1[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1} + z_i) / (2N_L)$$

$$M_3[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2) / (3N_L)$$

$$M_4[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^4 + z_{i+1}^3z_i + z_{i+1}^2z_i^2 + z_{i+1}z_i^3 + z_i^4) / (5N_L)$$

1. 서 론

원통셸의 진동문제는 최근에 구조물의 경량화, 고강도화 등에 따라 많은 연구자들에 의해 큰 관심을 끌어 왔다. Arnold 와 Warburton의 선구적 연구를 시작으로 많은 연구가 수행되었으며, 1973년에 Leissa에 의해 집대성 되었다. 1981년 Chung은 임의의 형태의 경계조건을 갖는 등방성 원통셸의 진동특성에 대한 일반적 해법을 Sanders의 이론에 기초하여 유도하였다. 보통 원통셸은 주름, 보강재 및 복합재료 등으로 제작하게 되며 직교 이방성 및 준

† 교신저자; 충남대학교, 기계공학과

E-mail : songos@cnu.ac.kr

Tel : (042)821-5650, Fax (042)822-5642

** 한국원자력연구원

*** 특허청

* 충남대학교, 대학원

직교 이방성으로 취급할 수 있는 경우가 많은데, 이에 대한 연구가 국내외적으로 진행되어 왔다.

Ferreira 와 Roque^[7]는 multiquadric radial basis function에 기초한 meshless 방법을 사용해 복합재 쉘의 자유진동해석을 수행하였다. Mohamad^[5]는 복합재 deep thick shells에 대한 보다 정확한 식을 유도하였다. Lam^[6]은 FSDT에 근거한 complex method를 이용하여 thick symmetric angle-ply laminated composite shells의 진동 해석을 수행하였다.

최근에는 과학기술의 발달로 구조물의 대부분의 재료를 탄성학(elasticity)만을 고려한 구조물보다 탄성-열-자기-전기 등의 상호 연성을 고려한 구조물 연구에 대한 관심이 많아지고 있다.

전기-유체-열-구조 연성을 고려한 마이크로 액츄에이터의 위상체적설계^[8]와 핵융합로 ITER 실험로에 대한 연구를 예로 들 수 있다. 이와 같은 구조물은 탄성뿐만 아니라 탄성-열-자기-전기 등이 상호 연성된 구조물이기 때문에 설계시 상호 연성을 고려해야 한다. 원통셸에 그러한 연성효과를 고려하여, Qin^[3,4]은 자기-탄성-열을 고려한 원통셸의 비선형 응답과 안정성을 수행하였다. Tsai는 open-circuit surface condition을 갖는 경사기능 자기-전기-탄성 쉘의 자유진동 해석을 수행하였다.

본 연구에서는 복합재료 원통셸에 자기장이 축 방향으로 가해졌을 때, $[0\ 90\ 90\ 0]_s$ 으로 적층된 Symmetric & Cross-ply 인 경우에 대하여 자유진동해석을 수행하였다.

2. 운동방정식

2.1 마당 방정식(Field equations)

자기장이 가해지는 복합재료 원통셸의 운동방정식을 유도하기 위해서는 탄성, 열, 전자기장과 관련된 수식 정의가 선행되어야 한다. 따라서 본 연구에서는 변위장과 전자기장에 대한 마당방정식을 유도하고 이를 기반으로 운동방정식을 유도하였다.

(1) 변위장 (Displacement field)

복합재료 원통셸의 운동방정식을 유도하기 위해 Fig. 1과 같이 중립면(middle surface)을 기준으로 하는 x, θ, z 좌표계를 사용한다.

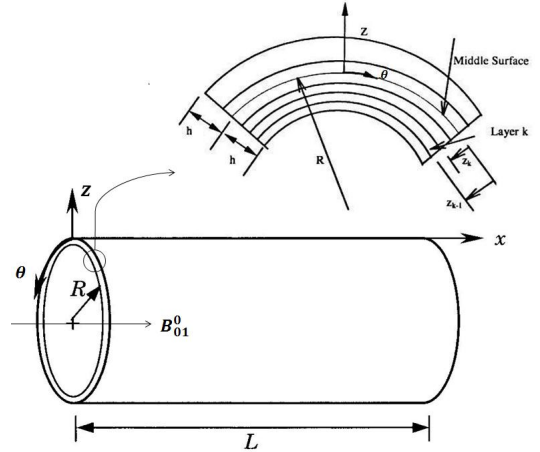


Fig. 1 Geometry of laminated composite shells

그 좌표계는 각각 원통셸의 축방향, 원주방향, 두께 방향을 나타낸다. 복합재료 원통셸의 모델링을 위해 다음과 같은 운동학적 가정을 고려하였다.

- (a) 각 복합재료 층들은 서로 완전히 접착되어 있으며 각 층의 두께는 모두 동일하다.
- (b) 원통셸의 두께는 길이와 반경에 비해 상대적으로 매우 작다.
- (c) 횡 전단 변형을 고려한다.
- (d) 모든 변형은 선형으로 가정한다.
- (e) 회전 관성은 무시한다.

위의 가정을 따라 원통셸의 3차원 문제를 2차원 문제로 변형하여 쓸 수 있다.

$$U_1(x, \theta, z, t) = u_1(x, \theta, t) + z\beta_1(x, \theta, t) \quad (1a)$$

$$U_2(x, \theta, z, t) = u_2(x, \theta, t) + z\beta_2(x, \theta, t) \quad (1b)$$

$$U_3(x, \theta, z, t) = u_3(x, \theta, t) \quad (1c)$$

식(1a~1c)에서 $u_1(x, \theta, t)$, $u_2(x, \theta, t)$, $u_3(x, \theta, t)$ 는 x_1, x_2, x_3 방향의 변위를 나타내며, β_1, β_2 는 α_2, α_1 축 방향의 회전각을 나타낸다.

식(1)을 이용하여 변형률을 구하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} + \alpha_3\beta_{1,1} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} + \alpha_3\beta_{2,2} \quad (2b)$$

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} + \alpha_3(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) \quad (2c)$$

$$\gamma_{13} = \beta_1 + u_{3,1} \quad (2d)$$

$$\gamma_{23} = \beta_2 + u_{3,2} \quad (2e)$$

식(2a~2e)에서 $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot) / \partial \alpha_i$ 를 나타낸다.

(2)전자기장(Electro-magnetic field)

전기장 및 자기장 방정식은 일반화된 맥스웰 방정식으로부터 유도된다. 맥스웰 방정식은 식(3a~3d)와 같이 쓸 수 있으며 자속밀도와 자기장 벡터와의 관계식^[1]은 식(3e)의 관계를 갖는다.

$$\text{페러데이 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3a)$$

$$\text{앙페르 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3b)$$

$$\text{오옴의 법칙} \quad \mathbf{J} = \mathbf{G}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) \quad (3c)$$

$$\text{로렌쯔 힘} \quad \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3d)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3e)$$

여기서 \mathbf{E}, \mathbf{H} 는 전기장 및 자기장 벡터를 나타내며, \mathbf{J}, \mathbf{B} 는 전류밀도 벡터와 자속밀도 벡터를 나타낸다. 또한 식(3d)에서 \mathbf{f} 는 단위 체적당 로렌쯔 힘을 나타내며 μ_0 는 진공에서의 투자율을 나타낸다. 식(3c)에서 \mathbf{G} 는 전기전도행렬을 의미하며 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $g_{11} = g_1 \cos^2 \theta + g_2 \sin^2 \theta$, $g_{33} = g_3$,

$g_{22} = g_2 \cos^2 \theta + g_1 \sin^2 \theta$, $g_{12} = (g_1 - g_2) \sin \theta \cos \theta$

$g_i (i = 1, 2, 3)$ 은 섬유주 방향(principle directions) 전기전도율을 나타낸다.

2.2 탄성-열-전기-자기 연성 운동 방정식

(1) Stress-Strain 관계식

평면 응력 상태인 경우 다음과 같이 복합재료 원통셀의 응력과 변형률 간의 관계식을 나타낼 수 있다.

여기서, $[\bar{Q}_{ij}]^{(k)} (i, j = 1, 2, 6)$ 는 좌표변환을 통하여 나온 각 lamina에 대한 강성요소로 환산탄성계수라

하고 $\bar{\alpha}_{ij} (i, j = 1, 2)$ 는 환산 열팽창계수를 뜻한다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} \\ \bar{\alpha}_{22} \\ \bar{\alpha}_{12} \end{bmatrix} \Theta \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

식(5)를 두께에 따라 적분한 합 응력과 합 모멘트에 관한 식은 식(6)으로 나타낼 수 있다.

(2) 합 응력과 합 모멘트 (Stress resultants and couples)

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{h^{(k)}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} d\alpha_3 \quad (6a)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{23} \\ N_{13} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{h^{(k)}} \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} d\alpha_3 \quad (6b)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{h^{(k)}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \cdot \alpha_3 d\alpha_3 \quad (6c)$$

(3) 운동방정식

식(1,2)와 식(6)을 아래의 Hamilton 원리를 이용하여 원통셀의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} [T - U + W_e] dt = 0 \quad (7)$$

@ $t = t_0, t = t_1$ 에서

$$\delta u_i = 0, \delta \beta_\zeta = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \quad \zeta = 1, 2)$$

여기서 T, U, W_e 는 각각 운동에너지, 탄성에너지, 외력을 나타내며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta T = \int_{-h}^h \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i \delta U_i d\Omega dx_3 \quad (8a)$$

$$\delta U = \int_{-h}^h \int_{\Omega} [\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}] d\Omega dx_3 \quad (8b)$$

$$\delta W_e = \int_{\tau} \rho H_i \delta U_i d\tau + \int_{\Omega} \sigma_i \delta U_i d\Omega \quad (8c)$$

여기서 H_i 는 물체력(body force), σ_i 는 표면력

(surface traction force)를 나타낸다.

Hamilton principle을 이용한 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\delta u_1 : N_{11,1} + \frac{1}{R} N_{12,2} - m_1 \ddot{u}_1 + \int_{-h}^h f_1 d\alpha_3 = 0 \quad (9a)$$

$$\delta u_2 : N_{12,1} + \frac{1}{R} N_{22,2} - m_1 \ddot{u}_2 + \int_{-h}^h f_2 dx_3 = 0 \quad (9b)$$

$$\delta u_3 : N_{13,1} + \frac{1}{R} N_{23,2} - \frac{1}{R} N_{22} + \int_{-h}^h f_3 dx_3 - m_1 \ddot{u}_3 = 0 \quad (9c)$$

$$\delta \beta_1 : M_{11,1} + \frac{1}{R} M_{12,2} - N_{13} - m_3 \ddot{\beta}_1 + \int_{-h}^h \alpha_3 f_1 d\alpha_3 = 0 \quad (9d)$$

$$\delta \beta_2 : M_{21,1} + \frac{1}{R} M_{22,2} - N_{23} - m_3 \ddot{\beta}_2 + \int_{-h}^h \alpha_3 f_2 d\alpha_3 = 0 \quad (9e)$$

경계조건

@ $\alpha_1 = \text{constant edge}$

$$\delta u_1 : (-N_{11} + \underline{N}_{11}) \delta u_1 = 0, \quad \delta u_2 : (-N_{12} + \underline{N}_{12}) \delta u_2 = 0,$$

$$\delta u_3 : (-N_{13} + \underline{N}_{13}) \delta u_3 = 0,$$

$$\delta \beta_1 : (-M_{11} + \underline{M}_{11}) \delta \beta_1 = 0, \quad \delta \beta_2 : (-M_{12} + \underline{M}_{12}) \delta \beta_2 = 0$$

@ $\alpha_2 = \text{constant edge}$

$$\delta u_1 : (-N_{12} + \underline{N}_{12}) \delta u_1 = 0, \quad \delta u_2 : (-N_{22} + \underline{N}_{22}) \delta u_2 = 0,$$

$$\delta u_3 : (-N_{23} + \underline{N}_{23}) \delta u_3 = 0,$$

$$\delta \beta_1 : (-M_{12} + \underline{M}_{12}) \delta \beta_1 = 0, \quad \delta \beta_2 : (-M_{22} + \underline{M}_{22}) \delta \beta_2 = 0$$

자기장 발생으로 인한 로렌즈 힘 f_i ($i = 1, 2, 3$) 은 식 (3d)로부터 구할 수 있다.

$$f_1 = J_2(B_{03}^0 + \alpha_3 B_{03}^1) - J_3(B_{02}^0 + \alpha_3 B_{02}^1) \quad (10a)$$

$$f_2 = J_3(B_{01}^0 + \alpha_3 B_{01}^1) - J_1(B_{03}^0 + \alpha_3 B_{03}^1) \quad (10b)$$

$$f_3 = J_1(B_{02}^0 + \alpha_3 B_{02}^1) - J_2(B_{01}^0 + \alpha_3 B_{01}^1) \quad (10c)$$

식(10)을 두께에 대해 적분하여 축 방향으로만 자기장이 흐를 때를 고려한 조건과 그 결과는 다음과 같다.

$$B_{01}^1 = B_{02}^0 = B_{02}^1 = B_{03}^0 = B_{03}^1 = 0, \quad B_{01}^0 \neq 0$$

$$E_{01}^0 = E_{01}^1 = E_{02}^0 = E_{02}^1 = E_{03}^0 = E_{03}^1 = 0$$

$$\int_{-h}^h f_1 d\alpha_3 = 0 \quad (11a)$$

$$\int_{-h}^h f_2 d\alpha_3 = -2h \mathbf{M}_0 [g_{33}] \dot{u}_2 (B_{01}^0)^2 = -2h \bar{g}_{33} \dot{u}_2 (B_{01}^0)^2 \quad (11b)$$

$$\int_{-h}^h f_3 d\alpha_3 = -2h \mathbf{M}_2 [g_{22}] \dot{u}_3 (B_{01}^0)^2 = -C_{22}^g \dot{u}_3 (B_{01}^0)^2 \quad (11c)$$

$$\int_{-h}^h \alpha_3 f_1 dx_3 = 0 \quad (11d)$$

$$\int_{-h}^h \alpha_3 f_2 d\alpha_3 = -2h \mathbf{M}_2 [g_{33}] \dot{\beta}_2 (B_{01}^0)^2 = -C_{33}^g \dot{\beta}_2 (B_{01}^0)^2 \quad (11e)$$

2.3 자기장이 축 방향으로 흐를 때 운동 방정식

(1) 운동방정식

본 연구에서는 수치예제로 원통셀의 모든 끝단이 단순지지 조건이고, Cross ply and Symmetric 조건을 만족하는 원통셀에 축 방향으로 자기장이 작용할 때의 자유진동해석을 수행하였으며, 해석에서는 굽힘 변위와 횡 전단 변위의 연성만 고려하였다. 자기장이 축 방향으로 작용할 때의 운동방정식과 경계조건을 변위의 식으로 나타내면 아래와 같다.

$$\delta u_1 : A_{11} u_{1,11} + A_{12} \left(\frac{1}{R} u_{2,12} + \frac{1}{R} u_{3,1} \right) \quad (12a)$$

$$+ A_{66} \left(\frac{1}{R} u_{2,12} + \frac{1}{R^2} u_{1,22} \right) - m_1 \ddot{u}_1 + \int_{\alpha_3} f_1 d\alpha_3 = 0$$

$$\delta u_2 : A_{66} \left(u_{2,11} + \frac{1}{R} u_{1,12} \right) + A_{12} \frac{1}{R} u_{1,12} \quad (12b)$$

$$+ A_{22} \left(\frac{1}{R^2} u_{2,22} + \frac{1}{R^2} u_{3,2} \right) - m_1 \ddot{u}_2 + \int_{\alpha_3} f_2 d\alpha_3 = 0$$

$$\delta u_3 : A_{55} (\beta_{1,1} + u_{3,11}) + A_{44} \left(\frac{1}{R} \beta_{2,2} + \frac{1}{R^2} u_{3,22} \right) \quad (12c)$$

$$- \frac{1}{R} A_{12} u_{1,1} - A_{22} \left(\frac{1}{R^2} u_{2,2} + \frac{1}{R^2} u_3 \right) - A_{11}^c \Theta u_{3,11}$$

$$- \frac{2}{R} A_{12}^c \Theta u_{3,12} - \frac{1}{R^2} A_{22}^c \Theta u_{3,22} - m_1 \ddot{u}_3 + \int_{\alpha_3} f_3 d\alpha_3 = 0$$

$$\delta \beta_1 : D_{11} \beta_{1,11} + D_{12} \frac{1}{R} \beta_{2,12} + D_{66} \left(\frac{1}{R^2} \beta_{1,22} + \frac{1}{R} \beta_{2,12} \right) \quad (12b)$$

$$- A_{55} (\beta_1 + u_{3,1}) - m_3 \ddot{\beta}_1 + \int_{\alpha_3} f_1 \alpha_3 d\alpha_3 = 0$$

$$\delta \beta_2 : D_{66} \left(\beta_{2,11} + \frac{1}{R} \beta_{1,12} \right) + D_{12} \frac{1}{R} \beta_{1,12} + D_{22} \frac{1}{R^2} \beta_{2,22} \quad (12b)$$

$$- A_{44} \left(\beta_2 + \frac{1}{R} u_{3,2} \right) - m_3 \ddot{\beta}_2 + \int_{\alpha_3} f_2 \alpha_3 d\alpha_3 = 0$$

경계조건

$$*x = 0, L$$

$$\delta u_1 : A_{11}u_{1,1} + A_{12} \left(\frac{1}{R}u_{2,2} + \frac{1}{R}u_3 \right) = 0$$

$$\delta u_2 : u_2 = 0$$

$$\delta u_3 : u_3 = 0$$

$$\delta \beta_1 : D_{11}\beta_{1,1} + D_{12} \frac{1}{R}\beta_{2,2} = 0$$

$$\delta \beta_2 : \beta_2 = 0$$

$$*\theta = 0, 2\pi$$

$$\delta u_1 : u_1 = 0$$

$$\delta u_2 : A_{12} \frac{1}{R}u_{1,1} + A_{22} \left(\frac{1}{R^2}u_{2,2} + \frac{1}{R^2}u_3 \right) = 0$$

$$\delta u_3 : u_3 = 0$$

$$\delta \beta_1 : \beta_1 = 0$$

$$\delta \beta_2 : D_{12} \frac{1}{R}\beta_{1,1} + D_{22} \frac{1}{R^2}\beta_{2,2} = 0$$

$$\text{여기서 } C_{\alpha\beta}^g \equiv 2hM_2[g_{\alpha\beta}], \bar{g}_{\alpha\beta} \equiv M_0[g_{\alpha\beta}], (\alpha, \beta) = 1, 2$$

(2) 진동방정식

경계조건을 만족하는 각 방향 변위 근사함수^[9]를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_1(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \alpha_m x \sin \beta_n \theta \cdot q(t) \quad (13a)$$

$$u_2(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x \cos \beta_n \theta \cdot q(t) \quad (13b)$$

$$u_3(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x \sin \beta_n \theta \cdot q(t) \quad (13c)$$

$$\beta_1(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \alpha_m x \sin \beta_n \theta \cdot q(t) \quad (13d)$$

$$\beta_2(x, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \alpha_m x \cos \beta_n \theta \cdot q(t) \quad (13e)$$

여기서, $\alpha_m = \frac{m\pi}{L}$, $\beta_n = n$ 는 각각

원통셸의 축과 원주 방향의 모드형상의 차수를 의미한다. 확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식(13)을 Hamilton 식에 대입하여 정리해 이산화된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K}]\mathbf{q}(t) = 0 \quad (14)$$

감쇠항을 포함하는 운동방정식의 자유진동 해석을 수행하기 위해서 아래와 같은 간단한 형태로 다시 정리할 수 있다.

$$[\mathbf{M}]^* \dot{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{K}]^* \mathbf{x}(t) = 0 \quad (15)$$

여기서, $[\mathbf{M}]^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}$, $[\mathbf{K}]^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$

$[\mathbf{M}]^*$, $[\mathbf{K}]^*$ 는 $2n \times 2n$ real symmetric matrix 이고, $\mathbf{x}(t)$ 는 $2n$ -dimensional state vector 이다.

$[\mathbf{M}]^*$, $[\mathbf{C}]^*$, $[\mathbf{K}]^*$ 행렬의 각 요소는 부록에 수록하였다.

식(16)의 해를 $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{x}$ 의 형태로 놓을 수 있고, 식(16)에 다시 대입하여 eigenvalue problem을 형태로 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\lambda [\mathbf{M}]^* \mathbf{x} + [\mathbf{K}]^* \mathbf{x} = 0 \quad (16)$$

여기서, λ 는 복소수 고유치로 $\lambda = \sigma + i\omega_d$ 와 같이 쓸 수 있다. σ 는 감쇠률, ω_d 는 고유진동수를 의미한다.

\mathbf{x} 는 eigenvector로 모드형상을 나타내는 벡터이다. 식(17)을 다시 간단히 정리하면 아래와 같고,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (17)$$

\mathbf{A} 를 정칙행렬이라 가정하면 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

식(17)을 이용하여 원통셸의 자유진동해석을 수행하였다.

3. 수치해석

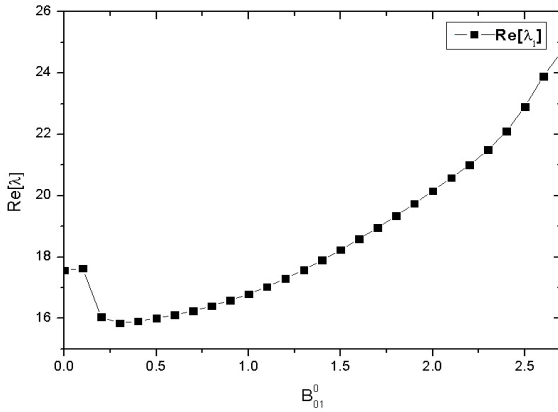
본 연구의 수치해석에 사용한 재료의 물성 변수는 다음과 같다.

$$E_1 = 25E_0, G_{12} = G_{13} = 0.5E_0, G_{23} = 0.2E_0,$$

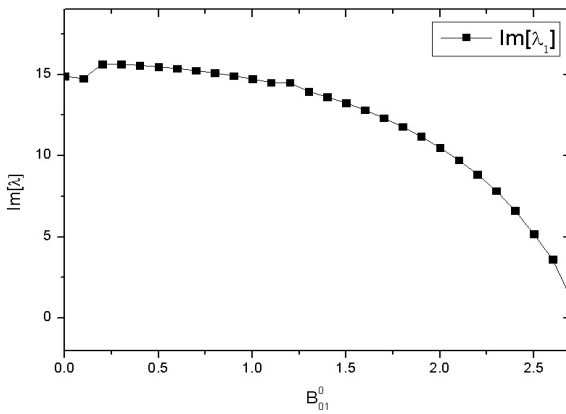
$$E_3 = E_2, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25, \nu_{23} = 0.01, \rho = 1528.15 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\alpha_1 / \alpha_0 = 0.1, \alpha_2 / \alpha_0 = 2, \alpha_3 / \alpha_0 = 1,$$

$$E_0 = 5.17 \times 10^9 \text{ N} / \text{m}^2, \alpha_0 = 10^{-3}, g_0 = 10^8 \text{ S} / \text{m}^3$$



(a) $\text{Re}[\lambda_1]$



(b) $\text{Im}[\lambda_1]$

Fig. 2 Variation of fundamental natural frequency and damping with B_{01}^1

($L=100h$, $R=5L$, $g_1 / g_0 = g_3 / g_0 = 3.0$, $g_2 = 1.1$)

Fig. 2는 원통셀에 축방향으로 자기장이 흐를 때, 그 값이 변함에 감쇠변화(a)와 1차 고유진동수(b)변화를 보여주고 있다. 자기장의 값이 커질수록 시스템의 감쇠형태는 증가하는 경향을 보였다. 결국 감쇠의 증가로 인해 시스템의 고유진동수는 감소하는 형태를 보인다. 이는 자기장이 운동방정식의 감쇠항에서 제곱을 갖는 한 값으로 나타나기 때문이다.

3. 결론

본 연구에서는 복합재료 원통셀에 축 방향으로 자기장이 작용할 때, 전자기-열-탄성이 연성된 운

동방정식과 경계조건을 Hamilton principle을 이용하여 유도하였다. 그 식으로 자유진동해석을 위해 각 변위에 단순지지 조건을 만족하는 근사함수를 대입하여 진동방정식으로 표현한 후, 자유진동 해석을 통해 고유값을 구함으로써 원통셀의 감쇠와 고유진동수를 구하였다. 이를 통해 자기장의 세기는 원통셀의 감쇠를 증가시키며 이에 따라 고유진동수가 감소하는 것을 알 수 있었다.

참고 문헌

- (1) Sung-Kyun Kim., Kune-Woo Lee., Jei-Kwon Moon., Jong-Woon Choi., Young-Jun Kim., Sang-Yun Park and Ohseop Song ,2011, Dynamic Characteristics of Composite Plate Subjected to Electromagnetic and Thermal Field, KSNVE, pp536-546
- (2) Hongyun Li., Qirong Lin, Zhengxing Liu, Chao Wang, 2001, Free vibration of piezoelectric laminated cylindrical shells under hydrostatic pressure, Solids and Structures, pp7571-7585
- (3) Zhanming Qin., Davresh Hasanyan, 2011, Fully non-linear magnetoelastic interactions of a circular cylindrical thin shell subject to electromagnetic fields, International Journal of Non-Linear Mechanics, pp. 425-435.
- (4) Zhanming Qin, 2010, Magneto-thermo-elasticity of an electroconductive circular cylindrical shell featuring nonlinear deformations, International Journal of Engineering Science, pp. 1797-1810.
- (5) Mohamad S. Qatu, 1999, Accurate equations for laminated composite deep thick shells, Solids and Structures, pp.2917-2941
- (6) K.Y.Lam., Wu Qian, 2000, Free vibration of symmetric angle-ply thick laminated composite cylindrical shells, Composite part B: engineering, pp. 345-354
- (7) A.J.M.Ferreira., C.M.C.Roque, R.M.N. Jorge, Natural frequencies of FSDT cross-ply composite shells by multiquadrics, Composite Structures, pp296-305
- (8) Yoon Gil Ho., 2010, Topology optimization considering the couplings of electro-fluid-thermal-compliant micro actuator, KSME, pp640-642 New York.
- (9) Reddy J.N., 2004, Mechanics of Laminated

후 기

이 논문은 2010 년도 교육과학기술부(한국연구재단)의 지원을 받아 수행된 일반연구자지원사업(기본연구)임.(2010-0024485)

부 록

A.1 식(15)의 A_{ij} , D_{ij} 행렬, $A_{11}^\alpha, A_{12}^\alpha, A_{22}^\alpha$ 행렬 및 질량계수 m_1, m_3

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_L} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

$$A_{11}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_L} \left[A_{11}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{16}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)} \right]$$

$$A_{12}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_L} \left[A_{16}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{66}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)} \right]$$

$$A_{22}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_L} \left[A_{12}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{22}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)} \right]$$

$$m_1 = \sum_{k=1}^{N_L} \rho_0^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad m_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \rho_0^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

A.2 질량행렬, 감쇠행렬 및 강성행렬

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}$$

여기서

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^L dx d\theta$$

$$M_{11} = \int_{\Omega} m_1 \psi_1 \psi_1^T d\Omega$$

$$M_{22} = \int_{\Omega} m_1 \psi_2 \psi_2^T d\Omega \quad C_{22} = \int_{\Omega} 2h \bar{g}_{33} (B_{01}^0)^2 \psi_2 \psi_2^T d\Omega$$

$$M_{33} = \int_{\Omega} m_1 \psi_3 \psi_3^T d\Omega \quad C_{33} = \int_{\Omega} C_{22}^g (B_{01}^0)^2 \psi_3 \psi_3^T d\Omega$$

$$M_{44} = \int_{\Omega} m_3 \psi_4 \psi_4^T d\Omega \quad C_{55} = \int_{\Omega} C_{33}^g (B_{01}^0)^2 \psi_5 \psi_5^T d\Omega$$

$$M_{55} = \int_{\Omega} m_3 \psi_5 \psi_5^T d\Omega$$

$$K_{11} = \int_{\Omega} \left(A_{11} \psi_{1,1} \psi_{1,1}^T - \frac{1}{R^2} A_{66} \psi_1 \psi_{1,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{12} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_{1,1} \psi_{2,2}^T - \frac{1}{R} A_{66} \psi_1 \psi_{2,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{13} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_{1,1} \psi_3^T \right) d\Omega$$

$$K_{21} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_{2,2} \psi_{1,1}^T - \frac{1}{R} A_{66} \psi_2 \psi_{2,11}^T \right) d\Omega$$

$$K_{22} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_{2,2} \psi_{2,2}^T - A_{66} \psi_2 \psi_{2,11}^T \right) d\Omega$$

$$K_{23} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_{2,2} \psi_3^T \right) d\Omega$$

$$K_{31} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_3 \psi_{1,1}^T \right) d\Omega$$

$$K_{32} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_3 \psi_{2,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{33} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_3 \psi_3^T - A_{55} \psi_3 \psi_{3,11}^T - \frac{1}{R^2} A_{44} \psi_3 \psi_{3,22}^T \right. \\ \left. + A_{11}^\alpha \Theta \psi_3 \psi_{3,11}^T + \frac{2}{R} A_{12}^\alpha \Theta \psi_3 \psi_{3,12}^T + \frac{1}{R^2} A_{22}^\alpha \Theta \psi_3 \psi_{3,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{34} = - \int_{\Omega} (A_{55} \psi_3 \psi_{4,1}^T) d\Omega$$

$$K_{35} = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{44} \psi_3 \psi_{5,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{43} = \int_{\Omega} (A_{55} \psi_4 \psi_{3,1}^T) d\Omega$$

$$K_{44} = \int_{\Omega} \left(D_{11} \psi_{4,1} \psi_{4,1}^T + A_{55} \psi_4 \psi_4^T - D_{66} \frac{1}{R^2} \psi_4 \psi_{4,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{45} = \int_{\Omega} \left(D_{12} \frac{1}{R} \psi_{4,1} \psi_{5,2}^T - D_{66} \frac{1}{R} \psi_4 \psi_{5,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{53} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{44} \psi_5 \psi_{3,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{54} = \int_{\Omega} \left(D_{12} \frac{1}{R} \psi_{5,2} \psi_{4,1}^T - D_{66} \frac{1}{R} \psi_5 \psi_{4,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{55} = \int_{\Omega} \left(D_{22} \frac{1}{R^2} \psi_{5,2} \psi_{5,2}^T + A_{44} \psi_5 \psi_5^T - D_{66} \psi_5 \psi_{5,11}^T \right) d\Omega$$