

전달을 행렬의 특이치를 이용한 다입력/다출력 제진대계의 절연성능 평가법

Evaluation method of isolation performance for MIMO isolation table using singular value of transmissibility matrix

선종오* · 김광준†

Jong-Oh Sun, Kwang-joon Kim

Key Words : MIMO system(다입력/다출력 계), Singular value(특이치), Evaluation method of isolation performance(절연성능 평가법), Transmissibility matrix(전달을 행렬)

ABSTRACT

Isolation tables are widely used for precision equipments and their isolation performances have been usually expressed and evaluated by transmissibility. However, transmissibility is a concept for 1-degree of freedom(DOF) system. In practice, isolation tables are supported by more than 4 springs. Each spring is subjected to vertical and horizontal ground vibrations, and also the table has more than 1-DOF. Therefore, isolation tables should be treated as multi-input/multi-output(MIMO) system of which isolation performance is expressed by transmissibility matrix. However, the matrix is too complicated to be an index for a system.

In this paper, maximum singular value of transmissibility matrix is suggested as a simple performance index of a MIMO isolation system. Physical meaning of singular value is explained using a simple a 2-DOF isolation table. Furthermore, maximum singular values of passive, 3-DOF active and 6-DOF active isolation tables are obtained through experiments, and their meaning are explained and compared with each other.

1. 서 론

광학측정 혹은 나노공정용 정밀 장비는 그 성능 구현을 위해 지반진동이 특정수준 이하일 것을 요구하고 있으며⁽¹⁾, 지반진동을 절연하기 위해 제진대가 널리 사용되어 지고 있다. 제진대의 성능은 주로 전달율을 이용하여 표현이 되어지고 있는데^(2~4), 전달율은 1-자유도 계에 적용이 되는 개념으로 실제 제진대 계의 성능을 묘사하기에는 부적절한 개념이다.

일반적으로 제진대는 4개 이상의 절연요소로 지

지가 되며, 각각의 절연요소는 수직/수평 방향의 지반진동을 받게 된다. 그리고 제진대 정반 역시 1개 이상의 자유도를 갖는다. 따라서, 제진대는 다입력/다출력 계로 다루어져야 하며, 이 때 절연 성능은 전달율 행렬로 표현이 된다. 그러나, m개의 입력과 n개의 출력을 가지는 경우, 전달율 행렬은 $m \times n$ 크기를 가지며, 이는 단일 제진대계의 성능 지표로는 너무 복잡하다는 단점을 가진다.

신윤호 등은 이러한 단점을 극복하기 위해 전달율 행렬의 최대 특이치를 단일 성능 지표로 제시하였으나^(5,6), 그 물리적 의미에 대한 논의없이 사용을 하였다. 본 논문에서는 전달율 행렬 특이치가 가지는 물리적 의미에 대해서 논하고자 한다. 먼저 가장 단순한 다입력/다출력 제진대 계인 2-자유도 모형을

† 교신저자; 정회원, KAIST, 기계공학과

E-mail : kjkim@kaist.ac.kr

Tel : 042-350-3024, Fax :

* KAIST, 기계공학과

이용하여 전달을 행렬 특이치의 의미에 대해 설명하며, 수동형 및 3-자유도(heaving, pitching, rolling motion) 능동형, 6-자유도 능동형 제진대로부터 측정된 전달을 행렬의 최대 특이치를 이용하여 이들의 절연성능을 평가한다.

2. 전달을 행렬 특이치의 물리적 의미

본 장에서는 다입력/다출력 시스템의 가장 단순한 모형인 2-자유도 제진대를 이용하여서 전달을 행렬의 특이치가 가지는 의미에 대해 기술하고자 한다.

하나의 병진운동(x)과 하나의 회전운동(θ)을 가지는 Fig.1과 같은 2-자유도 제진대를 고려하도록 하겠다. 지반 진동 입력은 두 스프링 하부에서 수직 방향으로 가해진다. 이 때, 본 시스템의 운동 방정식은 아래와 같은 수식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{b}_1 \\ \dot{b}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서, m 과 I 는 각각 질량과 관성질량 모멘트이며, k 와 c 는 두 개의 동일한 스프링 강성과 점성 감쇠계수, L 은 정반 무게중심으로부터 스프링까지의 거리, b_1 과 b_2 는 각각 두 지반의 변위를 의미한다. 식(1)에 동강성 행렬의 역행렬을 곱하게 되면, 정반의 2-자유도 운동과 지반 가진 사이의 관계는 주파수영역에서 아래와 같은 수식으로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} X(\omega) \\ \Theta(\omega) \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} B_1(\omega) \\ B_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$[\mathbf{T}] = \frac{(k + j\omega c) \begin{bmatrix} (2kL^2 - I\omega^2) + j2L^2c\omega & (2kL^2 - I\omega^2) + j2L^2c\omega \\ -L\{(2k - m\omega^2) + j2c\omega\} & L\{(2k - m\omega^2) + j2c\omega\} \end{bmatrix}}{\{(2k - m\omega^2)(2kL^2 - I\omega^2) - 4c^2\omega^2 L^2\} + j2c\omega\{4kL^2 - I\omega^2 - m\omega^2\}}$$

여기서, $[\mathbf{T}]$ 는 전달을 행렬을 나타내며, ω 는 각주파수를 의미한다. 식(2)로 표현되는 2x2 전달을 행렬 특이치를 계산하면 식(3)과 같으며, 두 특이치에 해당하는 왼쪽 특이벡터와 오른쪽 특이벡터는 식(4)와 같다.

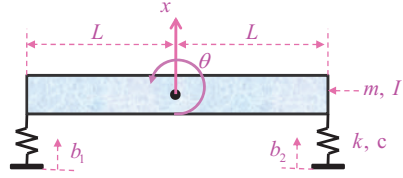


Figure 1 2-DOF isolation table as the simplest case of multi-dimensional vibration isolation system

$$\sigma_1(\omega) = \sqrt{\frac{2(k^2 + c^2\omega^2)}{(2k - m\omega^2)^2 + (2c\omega)^2}} \quad (3)$$

$$\sigma_2(\omega) = \sqrt{\frac{2L^2(k^2 + c^2\omega^2)}{(2kL^2 - I\omega^2)^2 + (2L^2c\omega)^2}}$$

$$\text{왼쪽 특이벡터: } \mathbf{v}_{L1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{L2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{오른쪽 특이벡터: } \mathbf{v}_{R1} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{R2} = \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

식(3)의 첫 번째 특이치 $\sigma_1(\omega)$ 는 정반의 수직방향 병진운동의 전달율을 의미하며, m , $2c$, $2k$ 를 각각 모달질량, 점성 감쇠계수, 강성으로 가진다. 이 때, 지반 입력은 동일 위상으로 움직이는 오른쪽 특이벡터 $[B_1 \ B_2] = \mathbf{v}_{R1}^T = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]$ 이고, 출력은 왼쪽 특이벡터 $[X \ \Theta] = \mathbf{v}_{L1}^T = [1 \ 0]$ 로서 수직방향 병진운동을 의미한다. 마찬가지로 식(3)의 두 번째 특이치 $\sigma_2(\omega)$ 는 정반 회전 모드의 전달율을 의미하고, I , $2cL^2$, $2kL^2$ 를 각각 모달질량, 점성 감쇠계수, 강성으로 가진다. 그리고, 지반 입력은 반대 위상으로 움직이는 오른쪽 특이벡터 $[B_1 \ B_2] = \mathbf{v}_{R2}^T = [-1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]$ 이며, 출력은 왼쪽 특이벡터 $[X \ \Theta] = \mathbf{v}_{L2}^T = [0 \ 1]$ 로서 회전운동을 의미한다. 여기서, 어느 모드가 더 낮은 주파수의 모드인지는 시스템의 계수에 의해 결정된다. 시스템의 계수가 $m=288\text{kg}$, $I=1152\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $k=14180\text{N/m}$, $c=100\text{N/m}^2$, $L=1\text{m}$ 일 때, 2-자유도 제진대의 특이치를 Fig.2에 나타내었다. 그래프에서 보는 바와 같이, 두 개의 특이치는 어느 한 주파수에서 서로 교차함을 알 수 있으며, 한 주파수에서 최대 특이치를 시스템의 단일 성능지표로 사용할 수 있다. 이 경우, 병진운동과 회전운동에 대한 고유진동수는 각각 1.6Hz와 0.8Hz이며, 감쇠비는

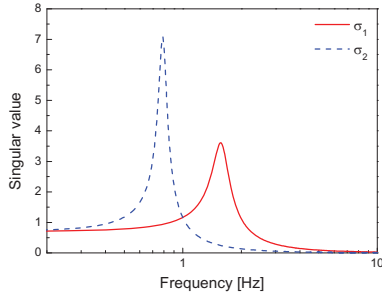


Figure 2 Singular values of 2x2 transmissibility matrix for 2-DOF isolation table

각각 0.035와 0.018이다. 그리고, 0.8Hz에서 반대 위상의 지반 입력은 $\sigma_2 \cong 7$ 만큼 회전운동을 증폭시키며, 1.6Hz에서 동일 위상의 지반 입력은 $\sigma_1 \cong 3.5$ 만큼 병진운동을 증폭시킨다.

요약하면, n-자유도를 갖는 계의 전달을 행렬에 대한 각각의 특이치는 한 모드의 전달율을 의미하고, 이에 해당하는 입력과 출력은 각각 오른쪽 특이벡터와 왼쪽 특이벡터로 나타난다. 그리고, 다자유도 시스템의 전달을 특이치를 주파수의 함수로 그리면 어느 한 주파수에서 두 개의 특이치가 교차하게 되며, 최대 특이치는 이러한 주파수에서 골(valley)을 갖게 된다.

3. 전달을 행렬 특이치를 이용한 6-자유도 제진대의 절연성능 평가

본 장에서는 앞서 살펴본 전달을 행렬의 특이치를 실제 6-자유도 공압제진대에 적용하여 그 성능을 평가한 결과를 기술한다. 먼저 3.1절에서 6-자유도 제진대의 지반 가진 절연성능 측정을 위한 실험 구성에 대해 설명하고, 3.2절에서는 실험을 통해 측정된 전달을 행렬의 특이치를 이용해 6-자유도 공압제진대의 지반진동 절연 성능을 기술한다.

3.1 지반진동 절연성능 측정 실험구성

6-자유도 공압제진대는 정반의 6-자유도 강제 운동을 출력으로 가진다. 입력은 지반 진동의 특성에 따라 달라지지만, 가장 일반적으로 생각하면 4개의 공기스프링 하부에서 발생하는 각각 3방향의 지반

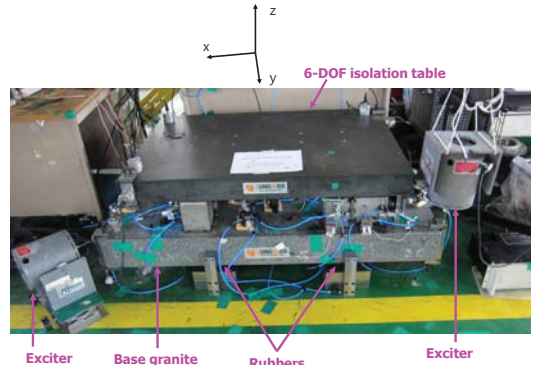


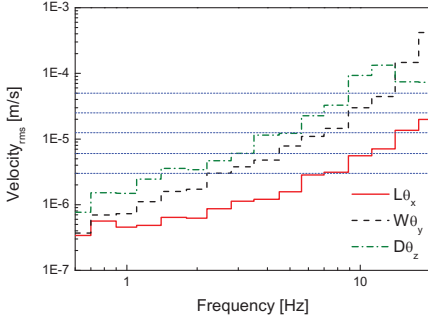
Figure 3 Experimental setup for excitation of bottom table

진동, 즉 12개의 지반 진동을 입력으로 생각할 수 있다. 그러나 이러한 입력을 실험으로 구현하는 것은 매우 비효율적인 방법이다.

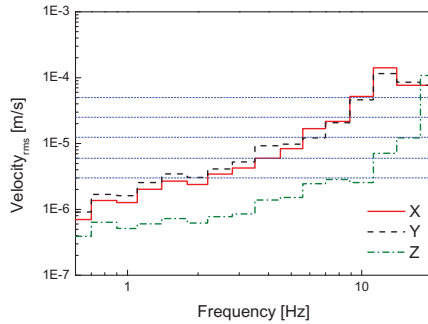
본 연구에서 사용한 지반 진동 생성을 위한 실험 구성을 Fig.3에 사진으로 나타내었다. 사진에서 상부 정반이 제어 대상체이며, 하부 정반은 지반 진동 생성을 위해 배치된 것으로 4개의 고무로 지지된다. 그리고, 하부 정반에 2개의 전동식 가진기를 각각 수직/수평 방향으로 장착하였으며, 가진기에 백색 잡음 전압을 가해주어 지반 진동을 생성하였다. 비록 2개의 가진기를 사용하지만, 하부 정반의 6-자유도 강제 고유진동수는 관심 주파수 구간인 20Hz 이하에 존재하므로 입력은 하부 정반의 6-자유도 강제 운동, 즉 6개가 된다. 이 때, 발생한 하부 정반의 6-자유도 지반 진동을 1/3 옥타브 밴드로 Fig.4에 나타내었으며, 그 크기 정도를 가늠하기 용이하게 지반 진동 허용기준(VC criteria)⁽¹⁾과 함께 표시하였다. Fig.4(a)는 하부 정반의 회전 운동을 나타내는데, 정반의 수평방향 길이(L:길이, W:너비, D:대각)를 곱하여 병진 운동의 차원으로 나타내었다. 지반 진동의 크기를 살펴보면 저주파에서는 지반 진동의 크기가 충분히 크지 않은데, 이는 전동식 가진기의 저주파에서의 용량이 충분히 크지 않기 때문인 것으로 생각된다.

3.2 수동형, 3-자유도 능동형 및 6-자유도 능동형 공압제진대의 지반진동 절연 성능

본 절에서는 실험을 통해 수동형, 3-자유도 능동형 및 6-자유도 능동형 공압제진대의 지반 진동 절연성능을 전달을 행렬의 특이치를 이용해 기술하며,



(a) rotational motion



(b) translational motion

Figure 4 Vibration level of base granite with vibration criteria VC-curve(VC-A, B, C, D and E; ---- dashed lines in descending order)

이들을 비교하며 그 성능을 살펴본다.

크기가 $m \times 1$ 인 입력 벡터 \mathbf{X} 와 $n \times 1$ 의 출력 벡터 \mathbf{Y} 를 가지는 다입력/다출력 시스템에서 $\mathbf{Y}=\mathbf{TX}$ 로 표현되는 입력과 출력 사이의 전달을 행렬 \mathbf{T} 는 아래 수식을 통해 계산될 수 있다⁽⁷⁾.

$$[\mathbf{T}] = (\mathbf{S}_{xx}^{-1} \mathbf{S}_{xy})^T \quad (5)$$

$$\mathbf{S}_{xx} = \begin{bmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} & \cdots & S_{x_1x_m} \\ S_{x_2x_1} & S_{x_2x_2} & \cdots & S_{x_2x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{x_mx_1} & S_{x_mx_2} & \cdots & S_{x_mx_m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{xy} = \begin{bmatrix} S_{x_1y_1} & S_{x_1y_2} & \cdots & S_{x_1y_n} \\ S_{x_2y_1} & S_{x_2y_2} & \cdots & S_{x_2y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{x_my_1} & S_{x_my_2} & \cdots & S_{x_my_n} \end{bmatrix}$$

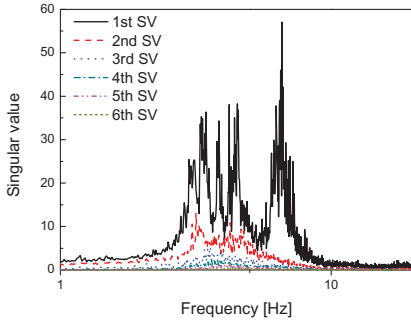
여기서, $S_{x_i x_j}$ 는 입력 x_i 와 x_j 사이의 상호 스펙트럼 밀도함수이고, $S_{x_i y_j}$ 는 입력 x_i 와 출력 y_j 사이의 상호스펙트럼 밀도함수이다. 본 논문에서는 앞서 설명한 바와 같이 Fig.3의 하부 정반 6-자유도 강제운동이 입력이 되며, 상부 정반의 6-자유도 강제운동이 출력이 되기 때문에 입력 및 출력 벡터는 각각 $\mathbf{X}=[X_b \ Y_b \ Z_b \ W\theta_{lx} \ L\theta_{ly} \ D\theta_{lz}]^T$, $\mathbf{Y}=[X \ Y \ Z \ W\theta_x \ L\theta_y \ D\theta_z]^T$ 가 된다. 여기서, 밀첨자 b는 지반(base)을 뜻하며, 전달을 행렬의 무차원화를 위해 회전운동에 정반의 크기(L:길이, W:너비, D:대각)를 곱하여 병진운동 크기로 변환하였다.

수동형 제진대의 6x6 전달을 행렬 특이치를 계산하여 Fig.5(a)와 (b)에 각각 선형-로그 스케일과 로그-로그 스케일로 나타내었다. 6개의 특이치가 서로 교차하는 현상이 Fig.5(a)에서는 명확히 보이지 않지만, 로그-로그 스케일로 표현한 Fig.5(b)에서는 좀 더 명확히 볼 수 있다. 앞서 설명한 바와 같이 특이치가 서로 교차하는 주파수에서 최대 특이치는 골을 가지고 두 번째 특이치는 반대로 피크(peak)를 갖는다. 실제 측정에서 유한한 데이터로부터 주파수 분해능을 무한대로 낮출 수는 없었으며, Fig.5에서의 결과는 0.017Hz의 주파수 분해능, 16번의 앙상블(ensemble) 평균을 취한 것이며, 여러 번의 시행착오를 통해 얻은 최선의 결과이다. 6개의 특이치에 해당하는 곡선을 Fig.5(c)에 나타내었으며, 이는 1-자유도 전달결과와 같은 형태인 아래의 수식을 이용하여 곡선 접합한 결과이다.

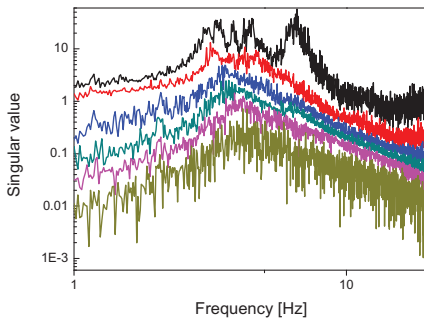
$$\sigma(\omega) = \sqrt{\frac{a + b\omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad (6)$$

여기서, ω_n 은 고유진동수, ζ 는 감쇠비, \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 는 곡선접합계수이다. 곡선 접합에 사용된 데이터는 2Hz에서 10Hz 사이의 첫 번째와 두 번째 최대치 값을 만들 사용하였다. 곡선 접합 결과로부터 알 수 있듯이, 6-자유도 제진대의 절연성능은 6개의 1-자유도 전달율로 나타낼 수 있다.

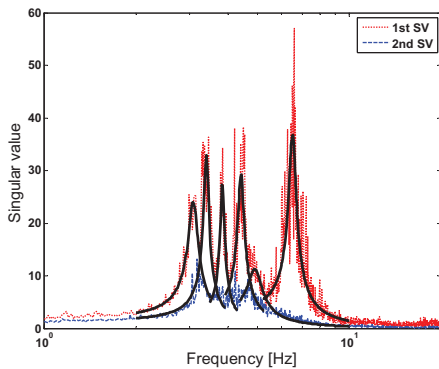
곡선 접합 결과로부터 추정된 6개의 공진주파수, 감쇠비, 그리고 왼쪽 특이벡터를 table 1에 나타내었다. 실제로 특이벡터는 각 자유도 간의 위상 차이로 인해 복소수값을 갖지만, 여기서는 각 모드에서



(a) Singular values (vertical axis in linear scale)



(b) Singular values (vertical axis in log scale)



(c) Curve fitting of singular values by 1-DOF system transmissibility

Figure 5 Singular values of transmissibility matrix for passive 6-DOF pneumatic table

어느 자유도가 주요한지를 살피기 위해 그 크기만을 표시하였다. $\mathbf{Y}=[X \ Y \ Z \ W\theta_x \ L\theta_y \ D\theta_z]^T$ 로 표현되는 출력 벡터, 즉 왼쪽 특이벡터로부터 알 수 있듯이, 각 모드들은 자유도 사이의 강한 연성을 보인다. 예를 들어, 3.08Hz의 첫 번째 모드의 경우는 병

Table 1 Resonance frequencies, damping ratio and left singular vectors for passive isolation table

Resonance frequency [Hz]	Damping ratio	Magnitude of corresponding left singular vector $[X \ Y \ Z \ W\theta_x \ L\theta_y \ D\theta_z]$
3.08	0.036	[0.80 0.03 0.14 0.15 0.52 0.20]
3.40	0.019	[0.04 0.50 0.59 0.45 0.31 0.33]
3.84	0.016	[0.06 0.52 0.41 0.05 0.12 0.74]
4.42	0.023	[0.13 0.17 0.18 0.58 0.61 0.46]
4.91	0.053	[0.21 0.26 0.32 0.16 0.45 0.74]
6.52	0.027	[0.04 0.11 0.35 0.67 0.64 0.04]

진 방향 \mathbf{X} 와 회전방향 θ_y 사이에 강한 연성을 보인다.

수동형, 수직방향 3-자유도(Z, θ_x, θ_y) 능동형, 그리고 6-자유도 능동형 공압제진대의 전달율 행렬 최대 특이치를 Fig.6에 나타내었다. 수동형의 공진 주파수에서 발생하는 높은 값의 특이치들이 6-자유도 능동제어를 통해 거의 완벽히 제거되고 있음을 알 수 있다. 반면에, 수직 3-자유도 운동만을 제어한 경우에는 6.52Hz의 공진을 제외한 나머지 피크들이 여전히 남아 있는 것을 볼 수 있다. 그 이유는 앞서 설명한 바와 같이 각 자유도 간의 강한 연성에 의한 것이다. 표 1의 왼쪽 특이벡터에서 나타난 바와 같이 수직 3-자유도 운동(Z, θ_x, θ_y)과 수평 3-자유도 운동(X, Y, θ_z)은 6.52Hz의 6번째 모드를 제외하고 서로 강한 연성을 보이고 있다. 따라서, 수직 3-자유도 운동이 주인 6번째 모드는 수직 3-자유도 제어만으로 공진 현상을 거의 제거할 수 있

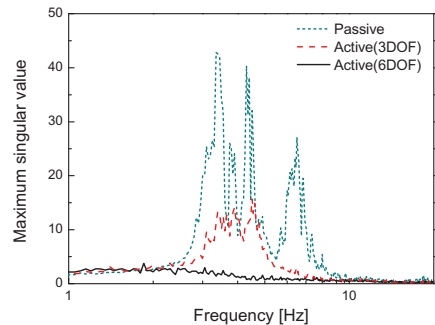


Figure 6 Comparison of maximum singular values of passive, 3-DOF active and 6-DOF active pneumatic table

으나, 다른 모드의 피크들은 크기가 약간 작아질 뿐 사라지지 않는다. 수동형, 3-자유도 능동형, 6-자유도 능동형의 전달율 행렬의 최대 특이치의 최대값은 각각 42.8, 15.7, 2.9이다.

앞서 살펴본 바와 같이 복잡한 다입력/다출력 제진대 계의 절연성능은 전달율 행렬의 최대 특이치를 이용하여 하나의 단일 지표로 표현되어질 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 다입력/다출력 시스템인 제진대의 지반진동 절연성능 평가를 위해 전달율 행렬의 최대 특이치를 단일 성능 지표로 사용할 것을 제시하였으며, 그 물리적 의미를 가장 단순한 다입력/다출력 시스템인 2-자유도 제진대를 이용하여 설명하였다. 전달율 행렬 하나의 특이치는 하나의 모드에 대한 전달율을 의미하며, 1-자유도 전달율로서 표현이 가능하였다. 그리고 이 때 입/출력 형상은 각각 오른쪽/왼쪽 특이벡터로 나타난다.

전달율 행렬의 특이치를 실험을 통해 측정한 수동형, 3-자유도 능동형 및 6-자유도 능동형 공압제진대에 적용하였으며, 그 결과를 비교/분석하였다. 6-자유도 강제 운동을 모두 제어하였을 때는 수동형에서 발생하는 공진 현상을 모두 제거할 수 있었으나, 수직 3-자유도만을 제어한 경우, 수평운동에 의한 모드 또는 수직/수평 운동이 연성되어 나타나는 모드를 제어할 수 없음을 지적하였다. 그리고 복잡한 다입력/다출력 제진대 계의 절연성능은 전달율 행렬의 최대 특이치를 이용하여 하나의 단일 지표로 간단히 표현되어질 수 있음을 보였다.

후 기

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2011-0000124)

참 고 문 헌

(1) C.G.Gordon, 1991, Generic Criteria for Vibration Sensitive Equipment, Proceedings of SPIE, pp. 71~85.

(2) Meiritz Seiki Co., Ltd., Meiritz active pneumatic suspension, product name: MAPS Series.

(3) Technical Manufacturing Corporation, Active vibration cancellation system, product name: TMC Eletro-Damp II.

(4) Bilz Vibration Technology, Active vibration isolation stage, product name: AISTM.

(5) Y.-h. Shin and K.-j. Kim, 2010, Three degrees of freedom active control of pneumatic vibration isolation table by pneumatic and time delay control technique, Transaction of ASME, Journal of Vibration and acoustics, Vol. 132, 051013.

(6) J.-O. Sun, Y.-h. Shin and K.-j. Kim, 2010, 3-DOF active pneumatic vibration isolation table using time delay control, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 497~498.

(7) D.E.Newland, 1993, An Introduction to Random vibrations, Spectral & Wavelet Analysis, Dober.