

# 비선형 $k-\epsilon$ 난류모형을 이용한 개수로 흐름 해석

## Numerical Simulations of Open-Channel Flow using Non-Linear $k-\epsilon$ Turbulence Model

최성욱\*, 강형식\*\*, 최성욱\*\*\*

Seongwook Choi, Hyeongsik Kang, Sung-Uk Choi

### 요 지

본 연구에서는 비선형  $k-\epsilon$  모형을 이용하여 직사각형 개수로에서 평균흐름과 난류구조를 모의하였다. 표준  $k-\epsilon$  난류모형은 난류의 등방성을 가정하여 국부적 평형상태에서 계산하기 때문에 유선에 따른 레이놀즈 응력의 변형이 큰 경우나 이방성이 강한 경우 이를 계산하지 못한다. 이를 보완하기 위하여 제시된 것이 비선형  $k-\epsilon$  난류모형이다. 본 연구에서는 표준  $k-\epsilon$  모형과 비선형  $k-\epsilon$  모형에 의한 모의결과를 비교하였다. 난류모형을 검증하기 위하여 직사각형 개수로에 흐름을 완전 발달된 등류로 가정하여 해석하였다. 지배방정식을 해석하기 위해 Patankar와 Spalding (1972)이 제시한 SIMPLER 알고리즘을 사용하였고 유한체적법을 이용하여 이산화하고 엇갈린 격자체계를 사용하여 계산에서 발생하는 과도한 진동을 줄였다. 또한 차분기법은 Patankar (1980)가 제시한 Power-law 기법을 채택하였으며 경계조건으로 2층 벽법칙 모형과 Hossain과 Rodi (1993)의 모형을 이용하였다. 두 모형의 적용성을 검증하기 위하여 실측자료를 이용하여 비교하였고 그 결과 비선형  $k-\epsilon$  모형이 표준  $k-\epsilon$  모형에 비해 좀 더 실측지에 가깝게 모의하는 것을 볼 수 있었다.

**핵심용어:** 개수로 흐름, 평균흐름, 난류구조, 2차류, 표준  $k-\epsilon$  모형, 비선형  $k-\epsilon$  모형

## 1. 서론

조도가 균일하고 단면이 단순한 직선 개수로 흐름에서도 바닥과 벽면, 자유수면의 영향으로 인하여 매우 복잡한 3차원 흐름구조를 보인다. 이러한 3차흐름을 해석하기 위해서는 이차류(secondary currents)를 알 필요가 있는데, 이는 난류의 비등방성(anisotropy)과 불균질성(non-homogeneity)에 의하여 발생한다. 따라서 이를 해석하기 위해서는 실험이나 수치모의를 하게 되는데, 난류의 특성상 측정하기가 쉽지 않으므로 수치모의를 하는 경우가 많다. 수치모의를 위한 난류모형에는 여러 가지가 있으나 개수로 흐름에 사용하기에는 RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) 모형이 적절하며 이 중에 하도변형 등에 의한 계산량을 고려하면  $k-\epsilon$  모형이 가장 적절하다. 따라서 본 연구에서는 개수로에서 표준  $k-\epsilon$  모형과 비선형  $k-\epsilon$  모형의 적용성을 검토하였다.

## 2. 지배방정식

\* 연세대학교 대학원 토목환경공학과 석박사통합과정 · E-mail : [csu1220@hotmail.com](mailto:csu1220@hotmail.com)

\*\* 한국환경정책평가연구원 물순환연구실 부연구위원 · E-mail : [hskang@kei.re.kr](mailto:hskang@kei.re.kr)

\*\*\* 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목환경공학과 교수 · E-mail : [schoi@yonsei.ac.kr](mailto:schoi@yonsei.ac.kr)

## 2.1 유동방정식

부유사 농도가 흐름에 영향을 거의 없을 때 개수로 흐름의 지배방정식인 레이놀즈 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

위의 식은 각각 연속방정식과 운동량방정식을 나타낸다. 여기서  $u_i$ 와  $F_i$ 는 각각  $x_i$ 방향의 유속 성분과 외력이고,  $\rho$ 는 물의 밀도,  $p$ 는 압력, 그리고  $\tau_{ij}$ 는 응력텐서  $= \rho u'_i u'_j$  이다. 여기에서 레이놀즈응력을 포함한 각종 변수들을 시간평균하고 주 흐름방향으로 완전히 발달된 등류로 가정하면 연속방정식과 운동량방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = g S_0 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (4)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{v'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \overline{v'w'} \right) \quad (5)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \overline{v'w'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \overline{w'^2} \right) \quad (6)$$

여기서  $u$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ 는  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 방향의 시간 평균된 유속,  $P$ 는 시간 평균된 압력,  $g$ 는 중력가속도,  $S_0$ 는 하상 바닥의 경사,  $\nu$ 는 유체의 동점성계수,  $u'v'$ ,  $u'w'$ ,  $\overline{v'w'}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$ 는 레이놀즈 응력이다.

## 2.1 k-ε 난류모형

본 연구에서는 시간평균된 레이놀즈응력을 산정하기 위하여 k-ε 난류모형을 사용하였다. 여기서 k는 난류운동에너지, ε은 난류에너지의 소산률이다. 유체점성을 무시한 레이놀즈응력은 다음과 같다.

$$- \overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (7)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta이다. k-ε 모형에서 사용하는 k와 ε의 수송방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \epsilon \quad (8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + \frac{\epsilon}{k} (c_{\epsilon 1} P_k - c_{\epsilon 2} \epsilon) \quad (9)$$

여기서  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $\sigma_{\epsilon_2}$ 는 모형상수로 Launder and Spalding (1974)은 각각 0.09, 1.44, 1.92, 1.0, 1.3을 제시하였는데 이를 표준 k-ε 모형이라 한다. 표준 k-ε 모형은 특성속도와 특성길이를 모두 수송방정식으로부터 구하므로 난류의 생성, 소멸, 이송, 확산을 모두 고려할 수 있으나, 와점성개념을 사용하고 있고 레이놀즈 응력을 국부적 평형상태로 구하며 등방성을 가정하기 때문에 유선에 따른 레이놀즈 응력의 변화율이 크거나 이방성이 강한 흐름의 경우 적용이 제한된다는 단점이

있다. 이를 해결하기 위한 것이 비선형  $k-\epsilon$  모형으로 Speziale (1987)은 레이놀즈 응력을 평균 유속경사로 표현하여 평면수로흐름에 대한 모형을 제시하였다. Speziale (1987)이 제시한 비선형  $k-\epsilon$  모형은 다음과 같다.

$$u' u'_j = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \frac{k^{5/2}}{\epsilon} S_{1ij} \quad (10)$$

$$+ C \frac{k^3}{\epsilon^2} \left( S_{1im} S_{1mi} - \frac{1}{3} S_{1mn} S_{1nm} \delta_{ij} \right) + C_E \frac{k^3}{\epsilon^2} \left( S_{2ij} - \frac{1}{3} S_{2mn} \delta_{ij} \right)$$

여기서  $C_D$ 와  $C_E$ 는 각각 모형상수이고 1.68을 제시하였으며  $S_{1ij}$ 와  $S_{2ij}$ 는 다음과 같다.

$$S_{1ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

$$S_{2ij} = \frac{\partial S_{1ij}}{\partial t} + u \cdot \nabla S_{1ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} S_{ki} \quad (12)$$

본 연구에서는 유한체적법을 이용하여 위의 지배방정식을 수치모의하였고, 이를 위해 Power-law 기법(Patankar, 1980)과 SIMPLER 알고리즘 (Patankar and Spalding, 1972)을 이용하였다. 경계조건으로 벽법칙을 사용하였고 자유수면의 경계조건은 난류운동에너지의 소산률을 Hossain and Rodi (1980)가 제시한 경계조건으로 사용한 것을 제외하면 모두 대칭평면조건을 적용하였다.

### 3. 모형의 적용

주 흐름과 이차류의 분포 모의의 정확성을 알아보기 위하여 Nezu and Rodi (1985)의 실내실험 자료를 이용하였다. 실험수로는 폭이 0.2 m이고 수심이 0.1 m인 직사각형 개수로이며 경사는 0.00059이다. 이 실험은 흐름이 완전히 발달된 상태에서 측정을 하였다.

그림 1은 실험수로에서 x-방향 유속분포를 표준  $k-\epsilon$  모형과 비선형  $k-\epsilon$  모형과 실험데이터로 비교한 것이다. y와 z는 수심으로 나누었고 유속은 각각 수로 내 최대 유속으로 나누어 무차원화 시켰다. 실험결과인 그림 1 (c)를 보면 최대 유속점이 자유수면 밑에서 발생하는 것을 볼 수 있는데 이를 velocity dip이라 한다. 표준  $k-\epsilon$  모형의 모의결과인 그림 1 (a)를 보면 velocity dip 현상이 발생하지 않고 수로중앙 자유수면에 최대 유속이 발생하는 것을 볼 수 있다. 비선형  $k-\epsilon$  모형의 모의결과인 그림 2(b)는 완벽하지는 않으나 어느정도 velocity dip현상을 보여주고 있으며 표준  $k-\epsilon$  모형과 비교해 보았을 때 x-방향 유속분포가 고르지 않게 실측치와 비슷한 양상으로 되어있는 것을 볼 수 있다.

그림 2는 실험수로에서 발생한 이차류 유속분포를 나타낸 것으로, x-방향의 최대 유속으로 나누어 무차원화 시켰다. 표준  $k-\epsilon$  모형은 등방성가정에 의하여 이차류를 정상적으로 모의하지 못하기 때문에 결과에서 제외하였다. 비선형  $k-\epsilon$  모형의 결과와 실험자료를 비교해보면 개수로에서 발생하는 와의 위치와 크기, 방향을 잘 재현하는 것을 볼 수 있다.

그림 3은 실험수로에서 분포되어있는 z-방향 난류강도를 표준  $k-\epsilon$  모형과 비선형  $k-\epsilon$  모형과 실험데이터로 비교한 것이다. 난류강도는 전단속도의 제곱으로 나누어 무차원화 시켰다. 표준  $k-\epsilon$  모형은 난류강도의 최대지점과 최저지점은 잘 모의하나 분포양상은 잘 모의하지 못하는 것을 볼 수 있다. 반면 비선형  $k-\epsilon$  모형은 바닥에서 약간 다른 분포를 보이나 전체적으로 비슷한 양상으로 모의하는 것을 볼 수 있다.

그림 4는 실험수로에서 발생하는 레이놀즈응력 ( $u'w'$ )을 모의한 것으로 전단속도의 제곱으로

나누어 무차원화 시켰다. 그림 4 (c)를 보면 흐름의 윗부분에서 음의 레이놀즈응력이 발생하는 것을 볼 수 있는데 이것은 velocity dip현상과 관계가 있다. 표준  $k-\epsilon$  모형의 모의결과인 그림 4 (a)로부터 음의 레이놀즈응력의 발생을 잘 모의하지 못하는 것을 볼 수 있는데 이를 통해 그림 1 (a)에서 유속경사역전현상이 발생하지 않음을 알 수 있다. 비선형  $k-\epsilon$  모형의 모의결과인 그림 4 (b)로부터 음의 레이놀즈응력의 발생을 잘 모의하는 것을 볼 수 있고 벽과 바닥에서 약간의 차이를 보이나 전반적인 레이놀즈응력의 분포를 잘 모의하는 것을 볼 수 있다.

이들의 데이터를 종합해 보았을 때, 유속의 분포나 난류강도나 레이놀즈 응력은 표준  $k-\epsilon$  모형이 대체적으로 잘 모의하지 못함을 보이고 비선형  $k-\epsilon$  모형은 표준  $k-\epsilon$  모형에 비하여 상대적으로 실제 흐름에 가깝게 잘 모의하는 편임을 볼 수 있다.

#### 4. 결론

표준  $k-\epsilon$  모형과 비선형  $k-\epsilon$  모형을 실험자료와 비교하여 표준  $k-\epsilon$  모형과 비선형  $k-\epsilon$  모형의 적용성을 검토하였다. Nezu and Rodi (1985)의 실내실험 결과의 수치비교를 통하여 비선형  $k-\epsilon$  모형이 표준  $k-\epsilon$  모형에 비해 크게 우수한 것을 알 수 있었으나 비선형  $k-\epsilon$  모형 역시 난류의 감쇠효과를 고려하지 못하여 바닥과 자유수면에서의 분포를 완벽히 동일하게 산정하지는 못하는 것을 알 수 있었다.

#### 감 사 의 글

본 연구는 국토해양부 건설기술혁신사업인 “하천에서 유사이동 및 하상변동 예측을 위한 3차원 수치모형의 개발(11기술혁신C04)”의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

#### 참 고 문 헌

1. Hossain, M.S. and Rodi, W. (1980). Mathematical modeling of vertical mixing in stratified channel flow. Proceedings of the 2nd Symposium on Stratified Flows.
2. Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1974). The numerical computation of turbulent flow. Computational Methods in Applied Mechanics, Vol. 3, pp. 269-289.
3. Nezu, I. and Nakayama, T. (1999). Numerical calculation of steep open-channel flows by considering effects of surface wave fluctuations. International Conference of WEESH, Seoul, Korea.
4. Nezu I. and Rodi W. (1985). Experimental study on secondary currents in open channel flow. 21st IAHR Congress, Melbourne, Australi, Vol. 2, pp. 19-23.
5. Patankar, S.V. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw Hill Book Corporation, New York, NY.
6. Patankar, S.V. and Spalding, D.B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, No. 10, pp. 1787-1806.
7. Speziale, C.G. (1987). On non-linear  $k-l$  and  $k-\epsilon$  models of turbulence. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 178, pp. 459-475.

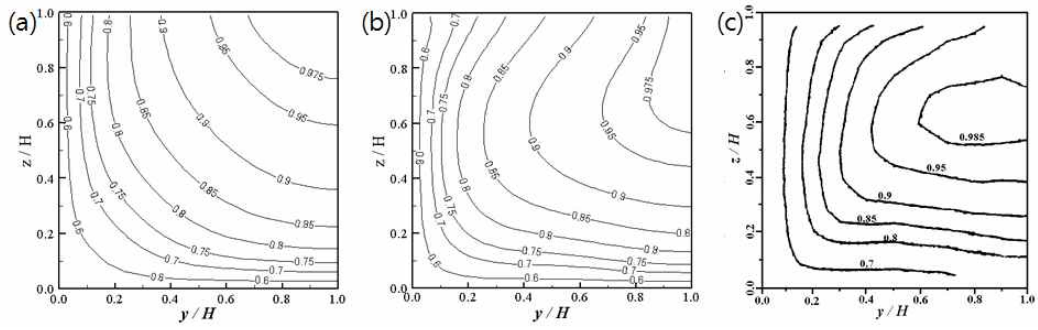


그림 1. x-방향 유속분포

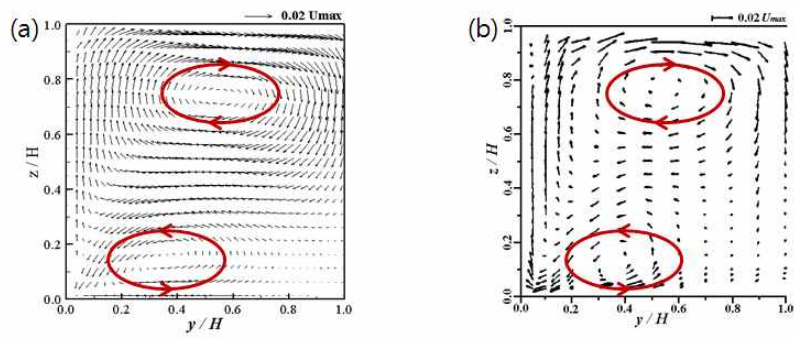


그림 2. 이차류 유속분포

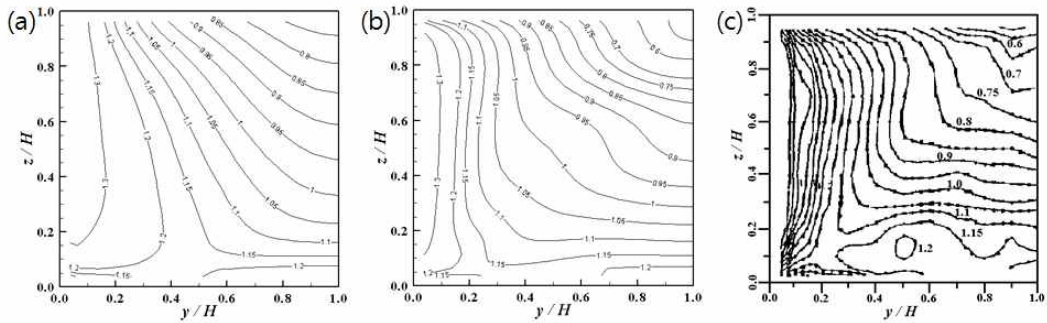


그림 3. z-방향 난류강도

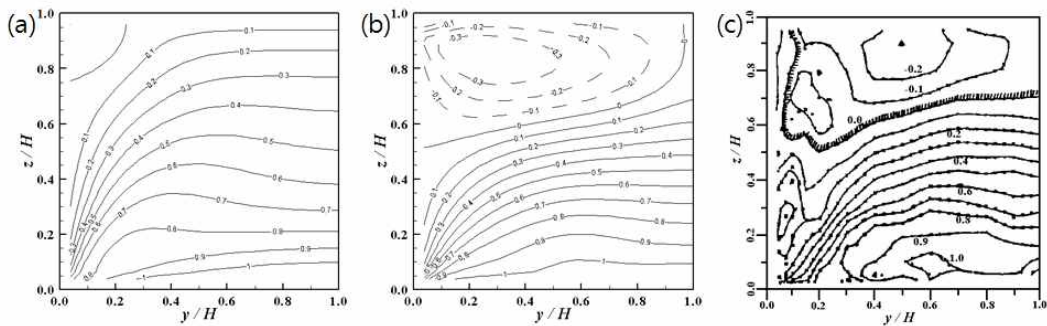


그림 4. 레이놀즈응력 분포 ( $u'w'$ )