제38회 한국정보처리학회 추계학술발표대회 논문집 제19권 2호 (2012. 11)

파이프 등반용 로봇의 기구학 연구

최유락*, 이재철*, 김승호*, 김재희*
*한국원자력연구원
e-mail:yrchoi@kaeri.re.kr

A Study on Kinematics for the Pipe-Climbing Robot

You-Rak Choi*, Jae-Cheol Lee*, Seong-Ho Kim*, Jae-Hee Kim*
*Korea Atomic Energy Research Institute

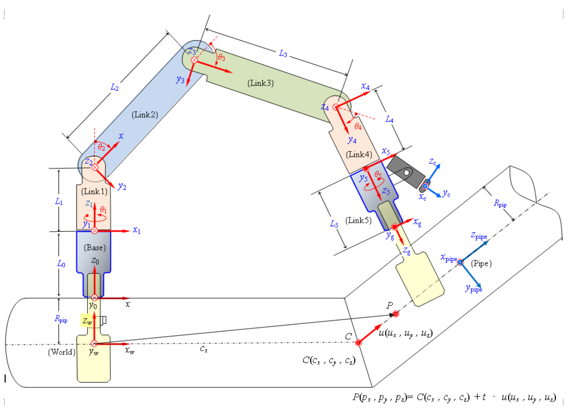
요 약

5축 관절로 구성된 파이프 등반용 로봇을 마스터 장비를 이용하여 반자동 원격제어하기 위해서는 마스터와 로봇 사이에 이동 좌표를 매칭 시켜주는 알고리즘이 필요하다. 본 논문에서는 로봇에 장착된 모터의 움직임을 기구학적으로 풀어냄으로써 마스터 장비의 좌표계를 로봇 모터의 구동과 직접 매칭 시키기 위한 과정을 수학적으로 기술한다.

1. 서론

5 DOF의 로봇 매니퓰레이터의 자세와 운동을 제어하려면 이 로봇의 기구학 (Kinematics)와 역기구학 (Inverse Kinematics)이 해석되어야 한다. 일반적으로 PUMA 로봇과 같이 범용의 6축 로봇이나 Scara 형태의 로봇들의 기구학과 역기구학은 이미 알려져 있으나, 본 논문에서 기술하는 자벌레 형태의 로봇은 그 기구가 독창적이고 이동로봇의 특수한 형태라서 아직 역기구학의 해가 발표된 바가 없다. 본 논문에서는 이에 대한 역기구학의 해를 구하는데 해석 내용 중 일부를 소개하고자 한다.

2. 파이프 등반 로봇 매니퓰레이터 기구학



(그림 1) Kinematic modeling of the pole climbing robot

그림 1에서 보는 바와 같이 로봇은 다섯 개의 관절로 이루어져있으며, 여섯개의 뭉치(Link)와 두 개의 손(Hand)으로 이루어져있다. 왼편에서 파이프를 잡고 있는 그리퍼 뭉치를 로봇의 BASE로 정하면 Link1은 z_1방향으로 회전 운동을 한다. Link2는 Link1과 관절2로, Link3는 Link2에, Link4는 Link3에, Link5는 Link4에 회전관절로 연결되어 있다. 각 관절의 회전각은 각각 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5$ 로 표시하는데, 다섯 개의 관절이 각각 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5$ 만큼 회전하였을 때, Hand/Girpper의 위치좌표 $G(x_g, y_g, z_g)$ 를 Base 좌표계상에서 구하려면 이 로봇의 기구학을 구해야 한다.

$${}^{ROB}_{M5}T = {}^{R0}_{M1}T \; {}^{M1}_{M2}T \; {}^{M2}_{M3}T \; {}^{M3}_{M4}T \; {}^{M4}_{M5}T$$

이를 위하여 각 Link의 좌표계간의 변환을 구해보면, 다음과 같은 결과 식을 얻을 수 있다.

$${}^{ROB}_{M1}T = Trans(0,0,L_0)\; ROT(z,\theta_1)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{M1}_{M2}T = Trans(0,0,L_1)\; ROT(x,-90^\circ)\;\; ROT(z,-90^\circ+\theta_2)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ -\cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{M2}_{M3}T = Trans(L_2,0,0)\;\; ROT(z,\theta_3)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & L_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{M3}_{M4}T = Trans(L_3,0,0)\;\; ROT(z,-90^\circ+\theta_4)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ -\cos\theta_4 & \sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & L_3 \\ -\cos\theta_4 & \sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
{}^{M4}_{M5}T = Trans(0, L_4, 0)\ ROT(x, -90^\circ)\ ROT(z, \theta_5)
$$
$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_4 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{M5}_{G}T = Trans(0, 0, L_5)
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

또한 M_5 좌표계에서 보았을 때 Hand/그리퍼의 내측면의 접점의 위치좌표는

$$
{}^{M5}P_{contact} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_5 + R_{pipe} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

이 된다.

이에 따라 최종적으로 구하려고 하는 Kinematics

$$
{}^{ROB}_{M5}T = {}^{R0}_{M1}T\ {}^{M1}_{M2}T\ {}^{M2}_{M3}T\ {}^{M3}_{M4}T\ {}^{M4}_{M5}T = {}^{R0}_{M4}T\ {}^{M4}_{M5}T
$$
$$
= \begin{bmatrix}
\begin{Bmatrix} c_1 s_{23} s_4 \\ -c_1 c_{23} c_4 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} c_1 s_{23} c_4 \\ +c_1 c_{23} s_4 \end{Bmatrix} & -s_1 & \begin{Bmatrix} c_1 s_2 L_2 \\ +c_1 s_{23} L_3 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} s_1 s_{23} s_4 \\ -s_1 c_{23} c_4 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} s_1 s_{23} c_4 \\ +s_1 c_{23} s_4 \end{Bmatrix} & c_1 & \begin{Bmatrix} s_1 s_2 L_2 \\ +s_1 s_{23} L_3 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} c_{23} s_4 \\ +s_{23} c_4 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} c_{23} c_4 \\ -s_{23} s_4 \end{Bmatrix} & 0 & \begin{Bmatrix} L_0 + L_1 + c_2 L_2 \\ +c_{23} L_3 \end{Bmatrix} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_4 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$
$$
= \begin{bmatrix}
\begin{Bmatrix} c_1 s_{23} s_4 \\ -c_1 c_{23} c_4 \end{Bmatrix} c_5 + s_1 s_5 & -\begin{Bmatrix} c_1 s_{23} s_4 \\ -c_1 c_{23} c_4 \end{Bmatrix} s_5 + s_1 c_5 & \begin{Bmatrix} c_1 s_{23} c_4 \\ +c_1 c_{23} s_4 \end{Bmatrix} & \begin{matrix} \{c_1 s_2 L_2 + c_1 s_{23} L_3\} \\ +\{c_1 s_{23} c_4 + c_1 c_{23} s_4\} L_4 \end{matrix} \\
\begin{Bmatrix} s_1 s_{23} s_4 \\ -s_1 c_{23} c_4 \end{Bmatrix} c_5 - c_1 s_5 & -\begin{Bmatrix} s_1 s_{23} s_4 \\ -s_1 c_{23} c_4 \end{Bmatrix} s_5 - c_1 c_5 & \begin{Bmatrix} s_1 s_{23} c_4 \\ +s_1 c_{23} s_4 \end{Bmatrix} & \begin{matrix} \{s_1 s_2 L_2 + s_1 s_{23} L_3\} \\ +\{s_1 s_{23} c_4 + s_1 c_{23} s_4\} L_4 \end{matrix} \\
\begin{Bmatrix} c_{23} s_4 \\ +s_{23} c_4 \end{Bmatrix} c_5 & -\begin{Bmatrix} c_{23} s_4 \\ +s_{23} c_4 \end{Bmatrix} s_5 & \begin{Bmatrix} c_{23} c_4 \\ -s_{23} s_4 \end{Bmatrix} & \begin{matrix} \{L_0 + L_1 + c_2 L_2 + c_{23} L_3\} \\ +\{c_{23} c_4 - s_{23} s_4\} L_4 \end{matrix} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$
$$
= \begin{bmatrix}
-c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 & c_1 c_{234} s_5 + s_1 c_5 & c_1 s_{234} & c_1 s_2 L_2 + c_1 s_{23} L_3 + c_1 s_{234} L_4 \\
-s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 & s_1 c_{234} s_5 - c_1 c_5 & s_1 s_{234} & s_1 s_2 L_2 + s_1 s_{23} L_3 + s_1 s_{234} L_4 \\
s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & c_{234} & L_0 + L_1 + c_2 L_2 + c_{23} L_3 + c_{234} L_4 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

와 같이 쓸 수 있는데, 여기서 c_1은 $\cos(\Theta_1)$, 이고 s_1은 $\sin(\Theta_1)$이며, c_{123}는 $\cos(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)$이고 s_{123}는 $\sin(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)$을 의미한다. 위와 같은 매니퓰레이터 기구학을 활용하여 각각의 관절이 Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5 만큼씩 회전한 상태에서 Hand/그리퍼의 위치를 RoB 좌표계 상에서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
{}^{ROB}P = {}^{ROB}_{M5}T\ {}^{M5}P
$$
$$
= {}^{R0}_{M1}T\ {}^{M1}_{M2}T\ {}^{M2}_{M3}T\ {}^{M3}_{M4}T\ {}^{M4}_{M5}T\ {}^{M5}P
$$
$$
= {}^{R0}_{M1}T(\theta_1)\ {}^{M1}_{M2}T(\theta_2)\ {}^{M2}_{M3}T(\theta_3)\ {}^{M3}_{M4}T(\theta_4)\ {}^{M4}_{M5}T(\theta_5)\ {}^{M5}P
$$

3. 파이프 등반 로봇 매니퓰레이터 역기구학

파이프 등반 로봇의 손이 잡으려고 하는 대상 파이프의 위치에 정확히 위치시켜야 정확한 파지가 가능하므로, 대상 파이프의 위치가 주어졌을 때 로봇의 각 관절의 회전각을 얼마로 하여야 하는가를 구하기 위하여 매니퓰레이터의 역기구학 (Inverse Kinematics)을 풀어야 한다. 아는 Hand/그리퍼의 좌표계 M_5의 위치(Position)와 자세(Orientation)가 주어졌을 때, 각 관절의 회전각 Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5 이 얼마여야 하는가를 구하는 것이다.

Given :

$$
{}^{ROB}_{M5}T = {}^{R0}_{M1}T\ {}^{M1}_{M2}T\ {}^{M2}_{M3}T\ {}^{M3}_{M4}T\ {}^{M4}_{M5}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

To Obtain : Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5

중간 계산식들을 거쳐 최종적으로 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

$$
\theta_1 = \phi = a\tan 2(p_y, p_x)
$$

$$
\theta_5 = a\tan 2(s_1 r_{11} - c_1 r_{21},\quad s_1 r_{12} - c_1 r_{22})
$$

$$
\theta_3 = a\tan 2(s_3, c_3) = a\tan 2\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{A^2 + B^2 - L_2{}^2 - L_3{}^2}{2 L_2 L_3} \right)^2},\ \frac{A^2 + B^2 - L_2{}^2 - L_3{}^2}{2 L_2 L_3} \right)
$$

$$
\theta_2 = \sin^{-1}\left[\frac{F}{\sqrt{D^2 + E^2}} \right] - a\tan 2\left(\frac{E}{\sqrt{D^2 + E^2}}, \frac{D}{\sqrt{D^2 + E^2}} \right)
$$

$$
\theta_4 = a\tan 2\left(c_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) - s_2 r_{33}\ ,\ s_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) + c_2 r_{33} \right) - \theta_3
$$

여기서

$$
A = c_1 p_x + s_1 p_y - L_4(c_1 r_{13} + s_1 r_{23})
$$
$$
B = p_z - L_0 - L_1 - L_4 r_{33}
$$

$$
D = c_1 p_x + s_1 p_y - c_1 r_{13} L_4 - s_1 r_{23} L_4
$$
$$
E = p_z - L_0 - L_1 - r_{33} L_4
$$
$$
F = c_3 L_3 + L_2
$$

역기구학을 구하기 위해서는 좌표 변환식을 역으로 활용해야하는데, 역기구학의 유도과정은 다음과 같다.

$$
\left[{}^{R0}_{M1}T \right]^{-1}\ {}^{ROB}_{M5}T = {}^{M1}_{M2}T\ {}^{M2}_{M3}T\ {}^{M3}_{M4}T\ {}^{M4}_{M5}T = {}^{M1}_{M5}T
$$

$$
LHS = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$
$$
= \begin{bmatrix}
c_1 r_{11} + s_1 r_{21} & c_1 r_{12} + s_1 r_{22} & c_1 r_{13} + s_1 r_{23} & c_1 p_x + s_1 p_y \\
-s_1 r_{11} + c_1 r_{21} & -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} & -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} & -s_1 p_x + c_1 p_y \\
r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - L_0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
RHS = {}^{M1}_{M5}T
$$
$$
= \begin{bmatrix}
-c_{234} c_5 & c_{234} s_5 & s_{234} & s_2 L_2 + L_3 s_{23} + L_4 s_{234} \\
-s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\
s_{234} c_5 & -s_{234} s_5 & c_{234} & L_1 + c_2 L_2 + L_3 c_{23} + L_4 c_{234} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

여기서 좌변과 우변의항을 일치시키면 θ_1을 구할 수 있다.

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = 0$$

$$= -s_1 \frac{p_x}{\sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2}} + c_1 \frac{p_y}{\sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2}} = 0$$

$$\sin(\theta_1 - \phi) = 0$$

$$\phi = a\tan 2(p_y, p_x)$$

$$\underline{\underline{\theta_1 = \phi = a\tan 2(p_y, p_x)}}$$

좌변과 우변의 항으로부터 θ_5을 구할 수 있다.

$$-s_1 r_{11} + c_1 r_{21} = -s_5$$

$$-s_1 r_{12} + c_1 r_{22} = -c_5$$

$$\underline{\underline{\theta_5 = a\tan 2(s_1 r_{11} - c_1 r_{21},\quad s_1 r_{12} - c_1 r_{22})}}$$

위의 식들을 연립하여 풀면 θ_5을 구할 수 있다.

$$s_{234} = c_1 r_{13} + s_1 r_{23}$$
$$c_{234} = r_{33}$$

$$s_2 L_2 + L_3 s_{23} + L_4 s_{234} = c_1 p_x + s_1 p_y$$
$$L_1 + c_2 L_2 + L_3 c_{23} + L_4 c_{234} = p_z - L_0$$

$$s_2 L_2 + L_3 s_{23} = c_1 p_x + s_1 p_y - L_4 s_{234} = c_1 p_x + s_1 p_y - L_4(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) = A$$
$$c_2 L_2 + L_3 c_{23} = p_z - L_0 - L_1 - L_4 c_{234} = p_z - L_0 - L_1 - L_4 r_{33} = B$$

$$L_2{}^2 + L_3{}^2 + 2L_2 L_3(s_2 s_{23} + c_2 c_{23}) = A^2 + B^2$$

$$c_3 = \frac{A^2 + B^2 - L_2{}^2 - L_3{}^2}{2L_2 L_3}$$

$$s_3 = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{A^2 + B^2 - L_2{}^2 - L_3{}^2}{2L_2 L_3}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{\theta_3 = a\tan 2(s_3, c_3)}}$$

θ_3 와 θ_4를 구하기 위하여는 좌표변환식의 역변환을 다시 한번 좌변과 우변에 곱하여 가능하게 되는데,

$$\left[{}^{R1}_{M2}T\right]^{-1}\left[{}^{R0}_{M1}T\right]^{-1}{}^{ROB}_{M5}T = {}^{M2}_{M3}T\,{}^{M3}_{M4}T\,{}^{M4}_{M5}T = {}^{M2}_{M5}T$$

$$LHS = \begin{bmatrix} s_2 & 0 & c_2 & -c_2 L_1 \\ c_2 & 0 & -s_2 & s_2 L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_2 & 0 & c_2 & -c_2 L_1 \\ c_2 & 0 & -s_2 & s_2 L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 r_{11} + s_1 r_{21} & c_1 r_{12} + s_1 r_{22} & c_1 r_{13} + s_1 r_{23} & c_1 p_x + s_1 p_y \\ -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} & -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} & -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} & -s_1 p_x + c_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_2(c_1 r_{11} + s_1 r_{21}) + c_2 r_{31} & s_2(c_1 r_{12} + s_1 r_{22}) + c_2 r_{32} & \underline{s_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) + c_2 r_{33}} & s_2(c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2(p_z - L_0) - c_2 L_1 \\ c_2(c_1 r_{11} + s_1 r_{21}) - s_2 r_{31} & c_2(c_1 r_{12} + s_1 r_{22}) - s_2 r_{32} & \underline{\underline{c_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) - s_2 r_{33}}} & \underline{c_2(c_1 p_x + s_1 p_y) - s_2(p_z - L_0) + s_2 L_1} \\ -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} & -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} & -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} & -s_1 p_x + c_1 p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = {}^{M2}_{M5}T$$

$$= \begin{bmatrix} s_{34} c_5 & -s_{34} s_5 & \underline{c_{34}} & \begin{matrix} L_2 + c_3(L_3 + c_4 L_4) - s_3 s_4 L_4 \\ = c_3 L_3 + (\underline{c_3 c_4 - s_3 s_4})L_4 + L_2 = c_3 L_3 + \underline{c_{34}} L_4 + L_2 \end{matrix} \\ -c_{34} c_5 & c_{34} s_5 & \underline{\underline{s_{34}}} & \begin{matrix} s_3(L_3 + c_4 L_4) + c_3 s_4 L_4 \\ = s_3 L_3 + (\underline{\underline{s_3 c_4 + c_3 s_4}})L_4 = s_3 L_3 + \underline{\underline{s_{34}}} L_4 \end{matrix} \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 좌변과 우변의 항을 연립하여 풀면 θ_2을 구할 수 있다.

$$c_3 L_3 + c_{34} L_4 + L_2 = s_2(c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2(p_z - L_0) - c_2 L_1$$
$$s_3 L_3 + s_{34} L_4 = c_2(c_1 p_x + s_1 p_y) - s_2(p_z - L_0) + s_2 L_1$$

$$where, \quad =$$
$$c_{34} = s_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) + c_2 r_{33}$$
$$s_{34} = c_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) - s_2 r_{33}$$

$$c_3 L_3 + (s_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) + c_2 r_{33})L_4 + L_2 = s_2(c_1 p_x + s_1 p_y) + c_2(p_z - L_0) - c_2 L_1 \quad \Rightarrow$$
$$\underbrace{c_3 L_3 + L_2}_{F} = s_2\underbrace{(c_1 p_x + s_1 p_y - c_1 r_{13} L_4 - s_1 r_{23} L_4)}_{D} + c_2\underbrace{(p_z - L_0 - L_1 - r_{33} L_4)}_{E}$$
$$s_3 L_3 + (c_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) - s_2 r_{33})L_4 = c_2(c_1 p_x + s_1 p_y) - s_2(p_z - L_0) + s_2 L_1 \quad \Rightarrow$$
$$s_3 L_3 = c_2(c_1 p_x + s_1 p_y - c_1 r_{13} L_4 - s_1 r_{23} L_4) + s_2(-p_z + L_0 + L_1 + r_{33} L_4)$$

$$D\sin\theta_2 + E\cos\theta_2 = F,$$

$$\frac{D}{\sqrt{D^2 + E^2}}\sin\theta_2 + \frac{E}{\sqrt{D^2 + E^2}}\cos\theta_2 = \frac{F}{\sqrt{D^2 + E^2}}$$

$$\sin(\theta_2 + \phi) = \frac{F}{\sqrt{D^2 + E^2}}$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left[\frac{F}{\sqrt{D^2 + E^2}}\right] - \phi$$

$$where \quad \phi = a\tan 2\left(\frac{E}{\sqrt{D^2 + E^2}}, \frac{D}{\sqrt{D^2 + E^2}}\right)$$

마지막으로위의 항으로부터 $\theta_3+\theta_4$ 를 구해내면 결국 θ_4를 이미 구해낸 θ_1, θ_2, θ_3, θ_5의 식으로 표현할 수 있다.

$$\theta_3 + \theta_4 = a\tan 2(s_{34}, c_{34})$$
$$= a\tan 2(\, c_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) - s_2 r_{33},\ s_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) + c_2 r_{33}\,)$$

$$\underline{\underline{\theta_4 = a\tan 2(\, c_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) - s_2 r_{33},\ s_2(c_1 r_{13} + s_1 r_{23}) + c_2 r_{33}\,) \ -\theta_3}}$$

참고문헌

[1] 최유락 외, 고소지역 장애물 극복형 원자로 배관 검사 로봇 개발 2년차 보고서, 2012