

# 갈부런 식을 이용한 움직이는 유체 내부 음향 전파 특성 분석

## Analysis of acoustic wave propagation in moving fluids using Galbrun equation

오승재\* · 왕세명†  
**Seungjae Oh, Semyung Wang**

### 1. 서 론

움직이는 유체 내부의 음향 전파 문제는 항공, 차량 및 가전 등의 분야에서 다양하게 연구되어 왔다. 대표적인 방법에는 Linearized Euler Equation (LEE)을 직접 해석하는 방법과 비 회전성의 특성을 가정하여 full-potential formulation을 이용하는 방법이 있다. full-potential formulation을 이용하는 경우, 비교적 해석이 간단하지만, 회전유동을 고려하지 못하는 단점이 있다. 따라서 본 논문에서는 비교적 유동에 자유로운 Galbrun equation을 소개하고, 가능성을 검토해 보겠다. Galbrun equation에 대한 자세한 소개는 참고문헌을 참조하기 바란다<sup>(1)</sup>.

### 2. Galbrun equation 적용

#### 2.1 Derivation of Galbrun equation

본 장에서는 Eulerian-Lagrangian description을 이용해 Galbrun equation을 유도하는 과정을 간단히 소개하겠다.

특정 미분방정식과 경계조건을 만족하는 해를  $\Phi$ 라 할 때,  $\Phi$ 는 Eq.(1)와 같이 평균 값( $\bar{\Phi}$ )과 그에 대한 변화량( $\Phi'$ )으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi = \bar{\Phi} + \varepsilon\Phi' = \bar{\Phi} + \Phi' \quad (1)$$

$\Phi$ 를 Lagrangian와 Eulerian description으로 나타내면, Fig.1와 같이 도식화 할 수 있고, Eq.(2)와 (3)으로 표현할 수 있다.

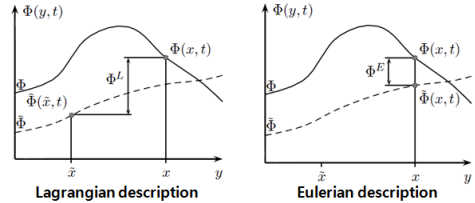


Fig.1 Lagrangian and Eulerian description

$$\Phi^L(x,t) = \Phi(x,t) - \bar{\Phi}(x,t) \quad (2)$$

where  $w_k = x_k - x_k$

$$\Phi^E(x,t) = \Phi(x,t) - \bar{\Phi}(x,t) \quad (3)$$

다시 Eq.(2)를 Taylor series와 Eq.(3)을 통해 정리하면, Eq.(4)와 같이 두 description간의 기본적인 관계를 얻을 수 있다.

$$\Phi^L(x,t) = \Phi^E(x_k,t) + \mathbf{w} \cdot \nabla \bar{\Phi}(x_k,t) \quad (4)$$

특히, Eq.(4)은 모든 Eulerian perturbation을 Lagrangian perturbation으로 대체할 수 있음을 보여준다. 위에 관계를 pressure, density 그리고 velocity에 적용해 보면, 아래 Eqs. (5)-(7)을 얻을 수 있다.

$$p^L = p^E + \mathbf{w} \cdot \nabla p_0 \quad (5)$$

$$\rho^L = \rho^E + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho_0 \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{w}^L}{dt} = \mathbf{v}^E(x_k,t) + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 \quad (7)$$

이러한 성질을 이용하여 LEE에 적용하면, 아래 Eq. (8)와 같은 Galbrun equation을 유도할 수 있다. 식을 살펴보면, Eulerian 방법으로 표현되었지만, dependent variable은 Lagrangian 방법으로 표현되었음을 알 수 있다. 또한 아래 Eq. (8)는 viscous term을 고려하지 않았으며, perfect, adiabatic, time harmonic condition을 가정하여 유도되었다.

$$-\bar{\rho}\omega^2\mathbf{w} - 2j\omega\bar{\rho}\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{w} + \bar{\rho}\mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{w}) + \nabla p^L = 0 \quad (8)$$

$$p^L + c_0^2\bar{\rho}\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

† 교신저자; 광주과학기술원 기전공학부

E-mail : smwang@gist.ac.kr

Tel : (062) 715-2390, Fax : (062) 715-2384

\* 광주과학기술원 기전공학부

## 2.2 Finite element formulation

Galbrun equation을 주어진 경계조건하에서 해를 구하기 위하여 수치해석 방법 중, 유한요소법을 선택하였다. 그리고 해를 효과적으로 구하기 위하여 pressure-displacement를 기반으로 아래 Eq. (9)와 같이 mixed variational formulation을 이용하였다.

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2 \rho_0} \delta p p_1 d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{w} \cdot (\nabla p_1) d\Omega \\ & -\omega^2 \int_{\Omega} \rho_0 \delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} d\Omega - j\omega \int_{\Omega} \rho_0 \delta \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) d\Omega \\ & + j\omega \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \delta \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \delta \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{w} \cdot (\rho_0 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})) (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{w} - j\omega \mathbf{w}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta p (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.3 Validation with semi-analytical model

Galbrun equation을 이용하여 유체 흐름이 존재하는 덕트 내부에서 음향 전파 특성을 분석하였다. 그리고 Galbrun equation을 이용한 모델과 semi-analytical 모델 사이에서 차이를 살펴 보았다.

첫 번째 예제는 Fig.2와 같이 Mach number 0.4의 uniform한 유동이 존재하고, Rigid wall 경계조건에서의 음향전파 특성이다.

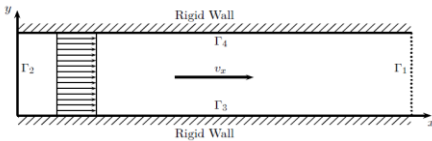


Fig.2 Geometry & boundary information of example 1

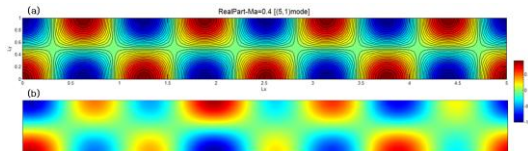


Fig.3 Comparison of eigenmode

(a)Analytical, fn=0.6216 (b)Galbrun equation, fn=0.6198

두 번째 예제는 Fig.4와 같이 Mach number 0.3의 uniform한 유동이 존재하고, Impedance wall (Z=2-j2) 경계조건에서의 음향전파 특성이다.

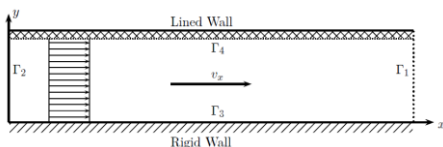


Fig.4 Geometry & boundary information of example 2

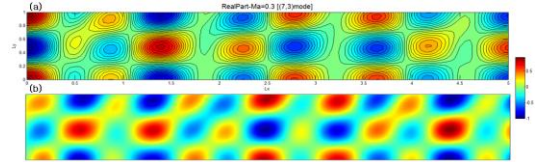


Fig.5 Comparison of eigenmode

(a)Semi-analytical, fn=1.18530-j0.0347

(b)Galbrun equation, fn=1.1963-j0.0412

세 번째 예제는 Fig.6와 같이 Axi-symmetric duct에서 Mach number 0.4의 Shear flow 유동이 존재하고, Rigid wall 경계조건에서의 음향전파 특성이다.

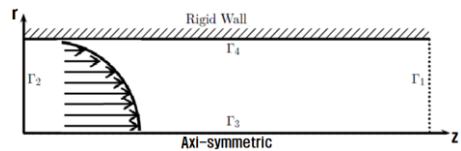


Fig.6 Geometry & boundary information of example 3

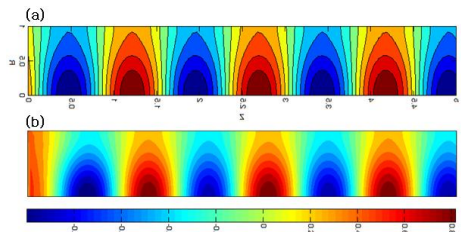


Fig.7 Comparison of upstream (wave number=1.1230)

at 191 [Hz] (a)Semi-analytical (Pridmore-Brown)

(b)Galbrun equation

## 3. 결론

이 논문에서는 Galbrun equation의 유도과정에 대해 살펴보았고, Semi-analytical 모델과의 비교를 통해 유동이 존재하는 덕트 내부 음향전파 문제의 적용가능성을 확인하였다.

## 참고 문헌

[1] C. Peyret, and G. Elias, "Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems," JASA 110, 661-668 (2001).