

효율적인 음향 해석을 위한 padé 근사법과 모델차수축소법의 비교연구

A comparison study of padé approximation and Model Order Reduction scheme for efficient acoustic analysis

구성열* · 국정환* · 현재엽* · 왕세명†

Seongyeol Goo, Junghwan Kook, Jaeyub Hyun and Semyung Wang

1. 서 론

일반적인 음향 해석의 경우 넓은 주파수 대역에 걸쳐 음압을 계산해야 하는 경우가 많다. 또한 스케일이 큰 시스템에서의 음향 해석은 자연스럽게 계산시간이 증가하게 된다. 유한 요소법을 이용하여 음향 해석을 하는 경우 계산비용의 문제는 더욱 커지게 된다. 유한 요소법을 이용한 음향 해석은 한번의 계산 시 하나의 주파수에 대해서만 해석을 할 수 있다는 단점이 있다. 따라서 다중 주파수에서 해석을 수행해야 하는 경우 계산에 많은 시간이 소요된다. 또한 큰 스케일의 경우 그 계산량은 기하급수적으로 증가하게 된다. 따라서 효율적인 음향계산을 위하여 근사해를 이용한 해석 방법이나 모델차수축소법과 같은 수치적 기법들이 요구된다. 대표적인 근사해를 이용하는 해석 방법으로는 유한요소법과 padé 근사법을 결합한 수치적 기법을 제안한 사례가 있으며⁽¹⁾, 모델차수축소법을 이용한 방법으로는 준 정적 리츠 벡터(QSRV)를 이용한 모델차수축소법이 제안된 사례가 있다⁽²⁾.

따라서 본 연구에서는 위 두 가지의 수치적 기법을 적용하여 동일한 음향문제에 대하여 해석을 수행하였으며 이를 통해 각 수치적 기법을 비교하는 연구를 수행하였다.

2. 본 론

2.1 음향 해석 모델

음향 문제에서 지배방정식은 헬름홀츠(Helmholtz) 방정식으로 나타낼 수 있으며 이후 여러 가지 형태의 경계조건(방사, 임피던스 경계조건 등)을 적용하여 음압 p 를 계산할 수 있다.

weighted residual 을 이용하여 유한 요소법을 적용하면 아래와 같은 대수 방정식을 얻을 수 있다.

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 는 각각 질량 행렬, 감쇠 행렬, 강성 행렬을 나타내며, \mathbf{F} 는 외력 벡터를 나타낸다.

2.2 PA 근사법

(1) padé 근사법의 개념

확장 주파수 (expansion frequency) 근방의 주파수에서 정확히 응답을 근사하기 위하여 다음과 같이 유리함수의 형태로 정의된 padé 근사함수를 이용할 수 있다.

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \sigma^i}{1 + \sum_{i=1}^N \mathbf{b}_i \sigma^i} \quad (2)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{p}_i \sigma^i \quad (3)$$

여기서 N 은 근사함수의 확장 차수를 나타내며, \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i 는 각각 확장 항 들의 계수를 나타낸다. 그리고 $\sigma = \omega - \omega_0$ 는 확장 주파수 ω_0 와 근사 주파수 ω 의 가까운 정도를 의미한다. padé 근사함수의 미정계수들은 식 (3)의 N_i 까지 근사한 테일러 급수와 padé 근사함수의 계수 비교를 통하여 얻을 수 있다. 유한 요소법을 통하여 주파수 대역의 음향해석을 할 경우 단일 주파수 마다 계산이 요구된다. 하지만 padé 근사함수를 이용하면 선택된 몇 개의 확장 주

† 교신저자; 정회원, 광주과학기술원(GIST), 기전공학과

E-mail : smwang@gist.ac.kr

Tel : (062) 715-2429, Fax : (062) 715-2384

* 광주과학기술원(GIST), 기전공학과

과수에서만 계산이 수행되기 때문에 전체적인 계산 시간이 줄어들게 된다.



Fig. 1. A simple spring-mass-damper system with a harmonic load

(2) padé 근사법 수치예제

그림 1은 주기적인 하중을 받고 있는 간단한 mass-spring-damper 시스템을 나타낸다. 위 시스템에 대하여 엄밀해에 의한 주파수 응답 특성과 padé 근사법에 의한 주파수 응답 특성을 각각 비교하였다. 그림 3에서 알 수 있듯이, 엄밀해와 padé 근사법에 의한 근사해가 잘 일치함을 보여준다.

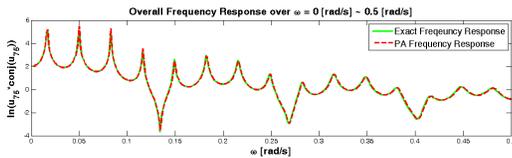


Fig. 2. Frequency response of exact solution and padé approximation

2.3 모델 축소법

(1) 기저벡터기반 모델 축소법

일반적으로 모델 축소법은 식 (5)의 기저벡터를 이용하여 근사된 해를 통하여 식 (4)와 같이 큰 스케일의 시스템을 식 (6)에 나타나는 작은 스케일의 시스템으로 변환시키는 방법이다.

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (4)$$

$$\mathbf{p} \cong \mathbf{p}_A = \Phi \mathbf{Q}$$

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (n \leq N) \quad (5)$$

$$[-\omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{C}_r + \mathbf{K}_r] \mathbf{Q} = \mathbf{F}_r \quad (6)$$

(2) 준 정적 리츠벡터(QSRV)기반 모델 축소법

음향 문제에서와 같이 주파수에 의존적인 시스템의 모델차수축소를 위해서는 준 정적 리츠벡터(Quasi-Static Ritz Vector)를 이용하여 모델차수축소를 수행한다. QSRV기반의 모델차수축소법은 기저벡터를 구성함에 있어 \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{F} 를 고려하여 기저벡터를 구성한다. 첫 번째 기저벡터는 식 (7)과 같이 ω_c 에서의 정적 응답으로 구성된다. 이후의 기저벡터

는 식 (8)의 그람-슈미츠(Gram-Schmidt) 직교화를 통해 순차적으로 구할 수 있으며, 위 방법으로 얻어진 기저벡터를 통해 모델차수축소법을 수행한다.

$$\phi_1 = \frac{1}{\phi_1^* \mathbf{M} \phi_1^*} \phi_1^* \quad \phi_1^* \equiv (\mathbf{K} - \omega_c^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{F} \quad (7)$$

$$\phi_j^{**} = \phi_j^* - \sum_{k=1}^{j-1} (\phi_j^{*T} \mathbf{M} \phi_k) \phi_k \quad (8)$$

(3) QSRV기반 모델 축소법 수치예제

그림 1의 동일한 시스템에 대하여 QSRV를 이용한 모델차수축소법을 적용하였으며 그 결과를 그림 4에 나타내었다. 아래 결과를 통해 QSRV를 이용한 모델차수축소법 또한 엄밀해와 잘 일치함을 알 수 있다.

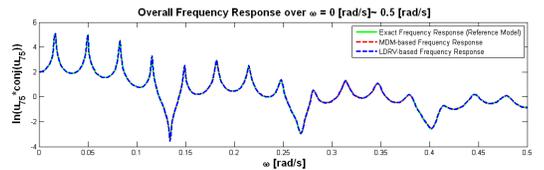


Fig. 3. Frequency response of exact solution and QSRV method

3. 결 론

본 연구에서는 큰 스케일의 음향문제를 해석함에 있어 사용되는 padé 근사법과 QSRV를 이용한 모델차수축소법을 비교연구 하였다.

참고문헌

- (1) Junghwan Kook, Jakob S. Jensen, Semyung Wang, "Computation of Zwicker's loudness and design optimization with Padé approximation", KSME, pp279~284, 2011
- (2) Gil Ho Yoon, "Toward a multifrequency quasi-static Ritz vector method for frequency-dependent acoustic system application", Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 89, pp. 1451-1470, 2012.