

임의 형상 평판의 고정밀도 고유진동수 추출 기법 개발

Method for Accurately Extracting Natural Frequencies of Arbitrarily Shaped Plates

강상욱† · 김진곤*
S. W. Kang and J. G. Kim

1. 서 론

임의 형상 평판의 고유진동수와 모드형상을 추출하기 위해 가장 일반적으로 사용되는 방법은 유한요소법(FEM) 또는 경계요소법(BEM)과 같은 수치해석법을 이용하는 것이다. 이들 수치해석법은 평판의 내부 또는 경계를 많은 노드로 분할하기 때문에 많은 수치 계산량을 필요로 하며, 이로 인해 수치 계산 오차가 크게 발생되게 된다.

본 논문에서는 이러한 단점들을 극복하기 위하여, 해석 대상 오목 평판의 영역을 여러 개의 블록 영역으로 분할한 다음, 각각의 블록 영역에 대해 NDIF 법⁽¹⁾을 적용하는 분할영역법 기반 NDIF 법¹이 새로이 연구되었다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

단순지지 경계조건을 가진 평판은 고정 경계를 가진 멤브레인과 유사성을 가지기 때문에, 평판의 자유 진동 지배방정식은 식(1)과 같이 멤브레인 지배방정식으로 대체될 수 있다⁽²⁾.

$$\nabla^2 W + \Lambda^2 W = 0, \quad (1)$$

여기서 W 는 평판의 진동 변위를 나타낸다.

식(1)에 고정 경계 조건(변위가 0인 조건),

$$W_\Gamma = 0, \quad \Gamma : \text{경계} \quad (2)$$

을 적용하는 방법에 의해 구해진 i 번째 고유치 Λ_i 를 식(3)에 적용하여, 최종적으로 평판의 i 번째 고유진동수 f_i 를 구할 수 있다⁽²⁾.

$$f_i = (\Lambda_i^2 / 2\pi) \sqrt{D / \rho_s} \quad (3)$$

여기서 ρ_s 는 평판의 면밀도, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ 는 평판의 강성을 뜻한다.

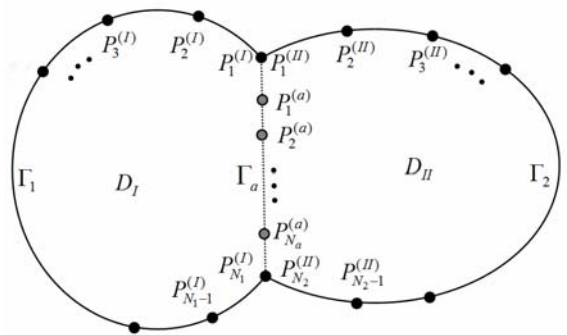


Fig. 1 Concave plate divided with 2 convex domains

2.2 분할영역법 기반 NDIF법

본 절에서는 Fig. 1 과 같이 오목 형상을 가진 평판을 2 개의 블록 영역 D_I 와 D_{II} 로 분할한 후, 각각의 영역에 대해 기존의 NDIF 법을 적용하여 시스템 행렬식을 먼저 추출한다. 이를 위해 영역 D_I 의 내부 한 점에서의 진동 변위를 식(4)와 같은 방법으로, 영역 D_I 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 에 위치한 노드들에 대한 무차원 동영향 함수들의 선형결합으로 다음과 같이 가정한다.

$$W_I(\mathbf{r}^{(I)}) = \sum_{s=1}^{N_1} A_s J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)} \right|) + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda \left| \mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)} \right|) \quad (4)$$

여기서 N_1 과 N_a 는 영역 D_I 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 위에 놓여진 노드의 개수를 각각 나타낸다. 그리고 $\mathbf{r}^{(I)}$ 는 영역 D_I 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내며, $\mathbf{r}_s^{(I)}$ 와 $\mathbf{r}_k^{(a)}$ 는 경계 Γ_1 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터와 접경 Γ_a 에

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : 02-760-4228, Fax : 02-760-4329

* 대구 가톨릭대학교 기계자동차공학부

위치한 k 번째 노드에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다.

영역 D_I 의 경계 Γ_1 은 변위가 영(zero)인 경계조건을 가지고 있으므로, 경계 Γ_1 위에 놓인 노드들에 대해 이산화된 고정 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$W(\mathbf{r}_i^{(I)})=0, i=1,2,\dots,N_1. \quad (5)$$

이제 식(4)를 식(5)에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_1} A_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) \\ + \sum_{k=1}^{N_a} A_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) = 0 \\ i=1,2,\dots,N_1. \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)을 행렬식의 형태로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{SM}_{11} \mathbf{A}_1 + \mathbf{SM}_{1a} \mathbf{A}_a = \mathbf{0}. \quad (7)$$

마찬가지 방법으로, 영역 D_{II} 의 내부 한 점에서의 진동 변위를 영역 D_{II} 를 둘러 싸고 있는 경계 Γ_2 과 접경 Γ_a 에 놓인 노드들에 대한 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} W_{II}(\mathbf{r}^{(II)}) = \sum_{s=1}^{N_2} B_s J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|) \\ + \sum_{k=1}^{N_a} B_k^{(a)} J_0(\Lambda |\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_k^{(a)}|) \end{aligned}, \quad (8)$$

여기서 N_2 는 영역 D_{II} 의 경계 Γ_2 위에 놓여진 노드의 개수를 나타낸다. 그리고 $\mathbf{r}^{(II)}$ 는 영역 D_{II} 내부의 한 점에 대한 위치벡터를 나타내며, $\mathbf{r}_s^{(II)}$ 는 경계 Γ_2 에 위치한 s 번째 노드에 대한 위치벡터를 나타낸다. 다음으로 경계 Γ_2 에 대한 고정 경계 조건 식(9)를 식(8)에 적용하면, 식(10)과 같은 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$W(\mathbf{r}_i^{(II)})=0, i=1,2,\dots,N_2. \quad (9)$$

$$\mathbf{SM}_{22} \mathbf{B}_2 + \mathbf{SM}_{2a} \mathbf{B}_a = \mathbf{0}. \quad (10)$$

영역 D_I 와 D_{II} 의 접경 Γ_a 에서 진동 변위와 변위의 기울기가 같다는 연속 조건을 고려한다. 이를 위해 접경 Γ_a 에 위치한 노드들에서의 연속 조건을 식(11)과 식(12)와 같이 이산화한다.

$$W_I(\mathbf{r}_i^{(a)}) = W_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)}), \quad i=1,2,\dots,N_a, \quad (11)$$

$$\partial W_I(\mathbf{r}_i^{(a)}) / \partial n_i = \partial W_{II}(\mathbf{r}_i^{(a)}) / \partial n_i, \quad i=1,2,\dots,N_a, \quad (12)$$

여기서 n_i 는 접경 위에 놓인 i 번째 노드의 법선 방향을 의미한다. 이제 식(4)와 식(8)을 식(11)과 식(12)에 대입하면 다음의 식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{SM}_{a1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{SM}_{aa} \mathbf{A}_a \\ = \mathbf{SM}_{a2} \mathbf{B}_2 + \mathbf{SM}_{aa} \mathbf{B}_a \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{VM}_{a1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{VM}_{aa} \mathbf{A}_a \\ = \mathbf{VM}_{a2} \mathbf{B}_2 + \mathbf{VM}_{aa} \mathbf{B}_a \end{aligned} \quad (14)$$

시스템 행렬식 식(7), 식(10) 식(13), 식(14)를 하나의 행렬식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{SM} \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

여기서

$$\mathbf{SM} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_{11} & \mathbf{SM}_{1a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{SM}_{22} & \mathbf{SM}_{2a} \\ \mathbf{SM}_{a1} & \mathbf{SM}_{aa} & -\mathbf{SM}_{a2} & -\mathbf{SM}_{aa} \\ \mathbf{VM}_{a1} & \mathbf{VM}_{aa} & -\mathbf{VM}_{a2} & -\mathbf{VM}_{aa} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

마지막으로 해석 대상 평판의 고유치는 식(15)에서 주어진 시스템 행렬의 판별식 식(17)의 해로부터 구할 수 있으며, 이 고유치를 식(3)에 대입하면 최종 고유진동수를 구할 수 있다.

$$\det[\mathbf{SM}] = 0. \quad (17)$$

3. 결 론

본 논문에서는 오목 형상을 가진 임의의 형상 평판의 고유치를 정확하게 추출할 수 있는 ‘분할영역법을 이용한 NDIF법’ 이론 정식화가 성공적으로 이루어졌다. 향후 연구에서는 정립된 이론을 검증하기 위한 다양한 예제 연구가 수행될 예정이다.

후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(2012R1A1A2044327)

참고문헌

- (1) Kang, S. W. and Lee J. M., 2001, Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-type functions, Journal of Sound and Vibration, Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.
- (2) Meirovitch, L., 1967, Analytical methods in vibrations, Macmillan Publishing, New York.