

# 원판형 압전 변환기의 복합 진동 특성

## Coupled Vibration Characteristics of Piezoelectric Disk Transducers

오 세 환\*. 양 신 재\*\*. 김 진 오†. 이 상 훈\*\*\*

Se Hwan Oh, Shin Jae Yang, Jin Oh Kim and Sang Hoon Lee

### 1. 서 론

압전 변환기는 역학적 양의 응력과 전기적 양인 전압간의 상호 변환인 압전현상을 이용하는 것으로서, 요즘은 다양한 분야에서 활용되고 있다.<sup>(1)</sup> 압전 변환기들은 대부분 원판형으로서 압전 소자의 두께 방향 진동을 이용한다. 원통형 압전 변환기의 반경 방향 진동 특성이 연구된 바 있다.<sup>(2)</sup>

원판형 압전 소자가 두께 방향으로 진동함에 따라 반경 방향 진동도 발생한다. 본 논문은 원판형 압전소자의 두께 방향과 반경 방향 진동을 모두 고려하는 복합 진동 특성을 다룬다.

### 2. 이론적 해석

#### 2.1 변환기 모델링

본 논문에서 대상으로 하는 압전 변환기는 두께 방향으로 분극되어 있는 얇은 원판형이다. 압전 변환기 원판의 두께는  $l$ 이고 반경은  $a$ 이다. 양쪽 면에 분포된 전극에 작용하는 전압  $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동된다. 압전 변환기의 구성 방정식<sup>(1)</sup>을 원통좌표계로 표현할 수 있다.<sup>(2)</sup>

축대칭으로  $\theta$ 에 무관한 반경 방향 변위  $u(r, z, t)$ 와 두께 방향 변위  $w(r, z, t)$ , 균일한 전극이 양쪽 면에 있어  $r$ 과  $\theta$ 에 무관한 전기 퍼텐셜  $\phi(z, t)$ 를 사용한다. 응력  $\sigma$ 와 전기적 변위  $D$ 는 변형률  $(\partial u/\partial r, u/r, \partial w/\partial z)$  및 전기장  $(\partial\phi/\partial z)$ 과 다음의 관계가 있다.

$$\sigma_r = c_{11}^E \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c_{12}^E \left( \frac{u}{r} \right) + c_{13}^E \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) + e_{31} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = c_{12}^E \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c_{11}^E \left( \frac{u}{r} \right) + c_{13}^E \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) + e_{31} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_z = c_{13}^E \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c_{13}^E \left( \frac{u}{r} \right) + c_{33}^E \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) + e_{33} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (3)$$

$$D_z = e_{31} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + e_{31} \left( \frac{u}{r} \right) + e_{33} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \epsilon_{33}^S \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (4)$$

여기서  $c^E, e, \epsilon^S$ 는 각각 일정한 전기장에서의 강성(stiffness), 압전 응력 상수(piezoelectric stress constant), 일정한 변형률에서의 유전율(permittivity)이다.

#### 2.2 두께 방향 진동 특성

두께 방향으로 진동하는 원판형 압전 변환기의 운동을 표현하기 위하여,  $r$ 과  $\theta$ 에 무관한 두께 방향 변위  $w(z, t)$ , 전기 퍼텐셜  $\phi(z, t)$ 를 사용한다. 힘의 평형으로부터 얻은 식<sup>(3)</sup>과 정전기적 방정식으로부터 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6)$$

여기서 파동방정식 (5)의  $c (= [\hat{c}_{33}/\rho]^{1/2})$ 는 파동의 전파속도이고,  $\hat{c}_{33} (= c_{33}^E + e_{33}^2/\epsilon_{33}^S)$ 는 수정된 탄성계수이며,  $\rho$ 는 밀도이다.

변환기의 한쪽 면이 고정되고, 다른 쪽 면이 자유로운 경우 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서 } w(z, t)=0, \phi(z, t)=0 \quad (7a, b)$$

$$z=l \text{ 에서 } \sigma(z, t)=0, \phi(z, t)=V_0 e^{j\omega t} \quad (7c, d)$$

전극에 가해지는 전기신호가 식 (7d)와 같은 형태라면, 운동 변위와 전기 퍼텐셜을 다음과 같이 변수 분리한다.

† 교신저자; 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과  
E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668

\* 정회원, 숭실대학교 대학원 기계공학과

\*\* 숭실대학교 공과대학 기계공학과

\*\*\* 대한센서(주)

$$w(z,t) = W(z)e^{j\omega t} \quad (8)$$

$$\phi(z,t) = \Phi(z)e^{j\omega t} \quad (9)$$

식 (8)과 (9)를 식 (5)와 (6)에 대입하면  $W(z)$ 에 대한 지배방정식을 얻는다. 경계조건 (7a)와 (7c)를 적용하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$W(z) = \frac{e_{33} V_0}{\frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \text{sinkl} - \widehat{c}_{33} kl \text{coskl}} \text{sinkl}z \quad (10)$$

여기서  $k$ 는 파동수로서,  $\omega = kc$ 인 관계가 있다. 식 (10)이 분모가 0인 경우가 공진을 나타내는 특성방정식이다.

### 2.3 반경 방향 진동 특성

반경 방향 힘 평형으로부터 얻은 식<sup>(3)</sup>에 식 (1)~(3)을 대입하여, 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

$$\phi(z,t) = \frac{V_0}{l} z e^{j\omega t} \quad (12)$$

여기서 파동방정식 (11)의  $c (= [c_{11}^P/\rho]^{1/2})$ 는 파동의 전파속도이고,  $c_{11}^P (= c_{11} - c_{13}^2/c_{33})$ 은 수정된 탄성계수이다.

변환기의 원주면이 고정인 경우 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$r=0, a \text{ 에서 } u(r,z,t) = 0 \quad (13)$$

운동 변위를 변수분리하면 다음과 같다.

$$u(r,z,t) = U(r)Z(z)e^{j\omega t} \quad (14)$$

식 (14)를 식 (11)에 대입하면  $U(r)$ 에 대한 지배방정식을 얻는다. 경계조건 (13)을 적용하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$U(r) = A J_1 \left( q_n \frac{r}{a} \right) \quad (15)$$

여기서  $q_n (= ka)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )은 3.83, 7.02, 10.17, ... 이고 공진주파수에 대응한다.

### 3. 유한요소해석

유한요소 해석용 상용 프로그램인 ANSYS를 사용하여 원판형 압전 변환기의 압전 고유진동수와 모드형상을 구하였다. 해석 모델을 1425개의 노드와

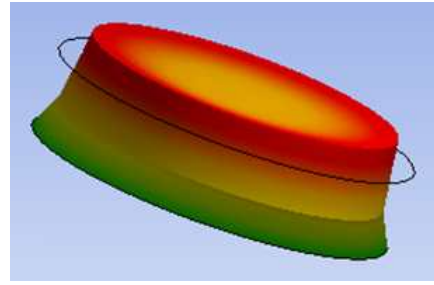


Fig. 1 Result obtained by the finite element analysis

1040개의 요소로 구성되었다. 원판의 양쪽 면에 전기적인 경계조건을 주어 모드해석(modal analysis)을 하였다. Fig. 1은 아랫면을 고정시킨 상태에서 해석한 결과의 예이다.

### 4. 결 론

압전 소자의 두께 방향과 반경 방향 진동을 모두 고려하여 이론적으로 해석하고 유한요소해석을 하였다. 두께 방향 진동과 반경 방향 진동이 복합적으로 존재하는 상황에서 고유진동수와 모드 형상을 구할 수 있다.

### 후 기

이 논문은 중소기업청에서 지원하는 2012년도 산학연 공동기술개발사업(No. C0032713)의 연구수행으로 인한 결과물입니다.

### 참 고 문 헌

- (1) Busch-Vishniac, I. J., 1999, Electro-mechanical Sensors and Actuators, Springer, New York, Chapter 5.
- (2) Lee, J. G., Kim, J. O., 2004, Radial Vibration Analysis of Cylindrical Piezoelectric Transducers Considering Anisotropy, Transaction of the KSME(A), Vol. 28, No. 3, pp. 274~280.
- (3) Achenbach, J. D., 1975, Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland, Chapter 2.