

# 경계조건에 따른 자기장 및 열하중을 받는 복합재료 원통셀의 진동해석

## Vibration Analysis of Composite Cylindrical Shells Subjected to Electromagnetic and Thermal Fields with Different Boundary Conditions

박상윤\* · 김성균\*\* · 최중운\*\*\* · 송오섭†

Sang-Yun Park, Sung-Kyun Kim, Jong-Woon Choi, and Ohseop Song

**Key Words** : Composite Laminated Shells(복합재료 적층 셀), Dynamic Characteristics(동적 특성), Electromagnetic Field(전자기장), Transverse Shear(횡 전단), Extended Galerkin Method(확장된 Galerkin 방법)

### ABSTRACT

In this paper free vibration analysis of symmetric and cross-ply elastic laminated shells based on FSDT with two different boundary conditions(C-C, S-S) was performed through discretization of equations of motion and boundary condition. Model of laminated composite cylindrical shells subjected to a combination of magnetic and thermal fields is developed via Hamilton's variational principle. These coupled equations of motion are based on the electromagnetic equations (Faraday, Ampere, Ohm, and Lorenz equations) and thermal equations which are involved in constitutive equations. Variations of dynamic characteristics of composite shells with applied magnetic field, temperature gradient, and stacking sequence for each boundary conditions are investigated and pertinent conclusions are derived.

### 기 호 설 명

**B** : 자속밀도 벡터  
**E** : 전기 벡터  
**H** : 자기 벡터  
**J** : 전류밀도 벡터  
**f** : 로렌츠 힘 벡터  
 $U_i, u_i$  : 곡선좌표의 3D, 2D 변위성분  
 $\beta_1, \beta_2$  : 중립축에 대한 회전각  
 $\Theta$  : 온도구배  
 $L, R$  : 원통셀의 길이와 반경  
 $N_L$  : 적층 개수  
 $\rho_0^{(k)}$  : k 번째 층의 밀도

$h$  : 원통셀의 두께  
 $\theta$  : 섬유각  
 $z_k$  : 원점에서 k 번째 층의 바닥까지 거리  
 $\mu_0$  : 진공 속에서의 투자율  
 $\dot{\quad}, \ddot{\quad}$  : 시간 t에 대한 한번 미분, 두번 미분

### 1. 서 론

원통셀은 굴뚝, 압력용기, 보일러를 비롯하여 항공기, 우주선, 원자로에 이르기까지 널리 사용되고 있다. 최근에는 구조물의 고강도화 및 경량화의 요구가 많아짐에 따라 복합재료의 개발과 보강재 사용이 증가되고 있다. 이에 따라, 복합재료 적층 셀의 진동에 관한 연구가 국내외적으로 활발히 진행해 왔다.

직교 이방성 및 복합재료 원통셀의 진동에 관한 연구는 Dong<sup>(1)</sup>의 연구를 시초로 하여 국내외적으로 활발히 수행되어 왔다.

Jones<sup>(2)</sup>와 Rao<sup>(3)</sup> 등은 cross-ply 적층 원통셀의

† 교신저자; 충남대학교, 기계공학과  
E-mail : songos@cnu.ac.kr

Tel : (042)821-5650, Fax (042)822-5642

\* 충남대학교, 대학원

\*\* 한국원자력연구원

\*\*\*특허청

진동특성에 관한 연구를 수행했으며, Greenberg<sup>(4)</sup> 및 Soldatos<sup>(5)</sup> 등은 angle-ply 적층 원통셀에서 적층재의 적층각도에 따른 영향을 고찰하였다.

최근에는 탄성(elasticity) 외에 탄성-열-자기-전기 등의 물리적 연성이 내재하는 다기능성 구조물(multifunctional structures)에 대한 연구에 관심이 많아지고 있다.

Jung<sup>(6)</sup>은 구조물에 대한 내진 및 내풍 대책으로 새로운 개념의 MR 감쇠기 기반 스마트 제진 시스템을 개발하였다. 패러데이의 전자기 유도법칙에 따른 진동에 의한 운동에너지를 전기에너지로 변환시키는 전자기유도부(electromagnetic induction system)을 이용하여 단순하고 경제적인 신개념의 스마트 제진 장치를 개발하였다. Kim<sup>(7,8)</sup>과 그의 공동연구자들은 다양한 물리적 연성이 내재하는 다기능성 구조물인 핵 융합로 ITER 실험로를 고려하여 복합재료 적층판과 셀에 자기장과 열하중이 가해질 때 나타나는 동적특성을 연구하였다. 이와 같은 구조물은 탄성뿐만 아니라 탄성-열-자기-전기 등이 상호 연성된 구조물이기 때문에 설계 시 상호 연성을 고려해야 한다.

이방성 복합재료의 경우에 그 적층방법(stacking sequence) 및 섬유각(fiber angle)에 따라 전기전도도 행렬이 변하여 로렌츠 힘의 변화를 초래한다<sup>(7,8)</sup>.

즉 동일한 전자기장이 가해져도 적층방법 및 섬유각에 따라 원통셀의 동적거동의 차이가 발생한다. 또한 동일한 열하중에 대해서도 적층방법 및 섬유각에 따라 동적거동의 차이가 존재한다.

본 연구에서는 온도구배가 존재하는 cross-ply 복합재료 원통셀에 자기장이 축 방향으로 가해졌을 때, 적층방법 및 섬유각에 따른 로렌츠 힘 및 온도구배의 변화와 그에 따른 자유진동 및 안정성(stability) 특성의 변화경향을 양단이 단순지지된 경계조건과 모두 구속된 고정단 경계조건에 대하여 고찰하였으며, 이는 기존의 등방성 원통셀에만 적용된 연성효과를 복합재료 원통셀에도 적용함으로써 다기능성 복합재료 구조물 설계에 유용하게 적용될 수 있을 것이다.

## 2. 운동방정식

### 2.1 기초방정식

운동방정식을 유도하기 위해서는 탄성, 열, 전자기장과 관련된 수식 정의가 선행되어야 한다. 따라서 변위장과 전자기장에 대한 기초방정식을 유도하

고 이를 기반으로 운동방정식을 유도하였다.

#### (1) 변위장 (Displacement field)

복합재료 원통셀의 변위장을 정의하기 위해 Fig. 1과 같이 중립면(middle surface)을 기준으로 하는  $x, \theta, z$  좌표계를 사용하며, 이는 각각 원통셀의 축방향, 원주방향, 두께방향 좌표를 나타낸다.

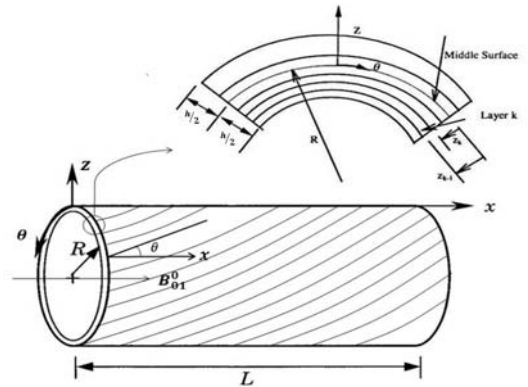


Fig. 1 Geometry of laminated composite shells

복합재료 원통셀의 모델링을 위해 다음과 같은 운동학적 가정을 고려하였다.

- (a) 각 복합재료 층들은 서로 완전히 접착되어 있으며 각 층의 두께는 모두 동일하다.
- (b) 원통셀의 두께는 길이와 반경에 비해 상대적으로 매우 작다.
- (c) 횡전단변형률을 고려한다.

위 가정에 따라 Love의 셸이론에 근거한 원통셀의 변위장을 다음과 같이 중립면에 대한 변위장으로 표현한다.

$$U_1(x, \theta, z, t) = u_1(x, \theta, t) + z\beta_1(x, \theta, t) \quad (1a)$$

$$U_2(x, \theta, z, t) = u_2(x, \theta, t) + z\beta_2(x, \theta, t) \quad (1b)$$

$$U_3(x, \theta, z, t) = u_3(x, \theta, t) \quad (1c)$$

식(1)에서  $u_1, u_2, u_3$ 는 각각 축방향, 원주방향, 두께방향의 중립면에서의 변위이며,  $\beta_1, \beta_2$ 는 중립축에 대한 회전각을 나타낸다.

식(1)로부터 변형률을 구하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_x = u_{1,1} + z\beta_{1,1} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_\theta = u_{2,2} + z\beta_{2,2} \quad (2b)$$

$$\gamma_{x\theta} = u_{1,2} + u_{2,1} + z(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) \quad (2c)$$

$$\gamma_{xz} = \beta_1 + u_{3,1} \quad (2d)$$

$$\gamma_{\theta z} = \beta_2 + u_{3,2} \quad (2e)$$

식(2)에서  $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot) / \partial \alpha_i$  를 나타낸다.

여기서  $\alpha_1 = x, \alpha_2 = \theta, \alpha_3 = z$ .

## (2) 전자기장 (Electro-magnetic field) 방정식

전기장 및 자기장 방정식은 다음과 같이 일반화된 맥스웰 방정식으로 표현된다<sup>(7,8)</sup>.

$$\text{페러데이 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3a)$$

$$\text{앙페르 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3b)$$

$$\text{오옴의 법칙} \quad \mathbf{J} = \mathbf{G}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) \quad (3c)$$

$$\text{로렌츠 힘} \quad \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3d)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3e)$$

여기서  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  는 전기장 및 자기장 벡터를 나타내며,  $\mathbf{J}, \mathbf{B}$  는 전류밀도 벡터와 자속밀도 벡터를 나타낸다. 또한 식(3d)에서  $\mathbf{f}$  는 단위 체적당 로렌츠 힘을 나타내며  $\mu_0$  는 진공에서의 투자율을 나타낸다. 식(3c)에서  $\mathbf{G}$  는 복합재료 섬유각(fiber angle)의 함수인 전기전도도 행렬이며 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $g_{11} = g_1 \cos^2 \theta + g_2 \sin^2 \theta$ ,  $g_{33} = g_3$ ,

$g_{22} = g_2 \cos^2 \theta + g_1 \sin^2 \theta$ ,  $g_{12} = (g_1 - g_2) \sin \theta \cos \theta$

$g_i (i = 1, 2, 3)$  은 섬유(fiber)의 주방향(principle directions) 전기전도도를 나타낸다.

## 2.2 탄성-열-전기-자기 연성 운동 방정식

### (1) 응력-변형률(Stress-Strain) 관계식

복합재료 원통셀의 응력과 변형률 사이의 관계식은 다음 식(5)와 같다.

식(5)에서  $[\bar{Q}_{ij}]^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 는 각 lamina에 대한 환산탄성계수이며  $\bar{\alpha}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) 는 환산 열팽창계수이다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left( \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_{11} \\ \bar{\alpha}_{22} \\ \bar{\alpha}_{12} \end{Bmatrix} \Theta \right) \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

여기에서  $\Theta$  는 온도구배를 뜻한다. 식(5)를 두께에 따라 적분한 합 응력과 합 모멘트에 관한 식은 식(6)과 같다.

### (2) 합 응력과 합 모멘트

(Stress resultants and couples)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{h^{(k)}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} dz \quad (6a)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\theta z} \\ N_{xz} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{h^{(k)}} \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (6b)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_f} \int_{h^{(k)}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz \quad (6c)$$

### (3) 운동방정식

아래의 Hamilton 원리를 이용하여 운동방정식 및 경계조건식을 유도한다.

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} [T - U + W_e] dt = 0 \quad (7)$$

@  $t = t_0, t = t_1$ :  $\delta u_i = 0, \delta \beta_\zeta = 0$  ( $i = 1, 2, 3$   $\zeta = 1, 2$ )

여기서  $T, U$  는 각각 운동에너지, 변형에너지를 나타내며 이들의 변분 및 외력에 의한 가상일  $\delta W_e$  는 다음과 같다.

$$\delta T = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i \delta \dot{U}_i d\Omega dx_3 \quad (8a)$$

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}] d\Omega dx_3 \quad (8b)$$

$$\delta W_e = \int_{\tau} \rho H_i \delta U_i d\tau + \int_{\Omega} \sigma_i \delta U_i d\Omega \quad (8c)$$

여기서  $H_i$  는 체적력(body force),  $\sigma_i$  는 표면력(surface traction force)을 나타낸다. 원통셀에 축방향으로 자기장이 흐를 때 발생하는 로렌츠 힘과 그에 의한 모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_i d\alpha_3 = 0 \quad (9a)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_2 d\alpha_3 = -h\mathbf{M}_0 [g_{33}] \dot{u}_2 (B_{01}^0)^2 = -h\bar{g}_{33} \dot{u}_2 (B_{01}^0)^2 \quad (9b)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_3 d\alpha_3 = -h\mathbf{M}_0 [g_{22}] \dot{u}_3 (B_{01}^0)^2 = -h\bar{g}_{22}^g \dot{u}_3 (B_{01}^0)^2 \quad (9c)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3 f_1 dx_3 = 0 \quad (9d)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3 f_2 d\alpha_3 = -h\mathbf{M}_2 [g_{33}] \dot{\beta}_2 (B_{01}^0)^2 = -C_{33}^g \dot{\beta}_2 (B_{01}^0)^2 \quad (9e)$$

여기서

$$C_{\alpha\beta}^g \equiv h\mathbf{M}_2 [g_{\alpha\beta}], \quad \bar{g}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{M}_0 [g_{\alpha\beta}], (\alpha, \beta) = 1, 2$$

$$\mathbf{M}_0 [g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} / N_L$$

$$\mathbf{M}_2 [g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^2 + z_{i+1} z_i + z_i^2) / (3N_L)$$

### 2.3 축 방향으로 자기장이 가해질 때의 지배방정식

cross-ply 대칭 적층(symmetrically laminated) 조건을 만족하는 원통셀에 축 방향으로 자기장이 작용하고 셀의 내외부에 온도구배가 존재할 때의 운동방정식과 경계조건을 변위의 향으로 나타내면 식(10)와 같다.

운동방정식

$$A_{11}u_{,11} + A_{12} \left( \frac{1}{R}u_{,2,12} + \frac{1}{R}u_{,3,1} \right) \quad (10a)$$

$$+ A_{66} \left( \frac{1}{R}u_{,2,12} + \frac{1}{R^2}u_{,1,22} \right) - m_1 \ddot{u}_1 = 0$$

$$A_{66} \left( u_{,2,11} + \frac{1}{R}u_{,1,12} \right) + A_{12} \frac{1}{R}u_{,1,12} \quad (10b)$$

$$+ A_{22} \left( \frac{1}{R^2}u_{,2,22} + \frac{1}{R^2}u_{,3,2} \right) - m_1 \ddot{u}_2 + \int_{\alpha_3} f_2 d\alpha_3 = 0$$

$$A_{55} (\beta_{,11} + u_{,3,11}) + A_{44} \left( \frac{1}{R}\beta_{,2,2} + \frac{1}{R^2}u_{,3,22} \right) \quad (10c)$$

$$- \frac{1}{R}A_{12}u_{,1,1} - A_{22} \left( \frac{1}{R^2}u_{,2,2} + \frac{1}{R^2}u_3 \right) - A_{11}^\alpha \Theta u_{,3,11}$$

$$- \frac{2}{R}A_{12}^\alpha \Theta u_{,3,12} - \frac{1}{R^2}A_{22}^\alpha \Theta u_{,3,22} - m_1 \ddot{u}_3 + \int_{\alpha_3} f_3 d\alpha_3 = 0$$

$$D_{11}\beta_{,11} + D_{12} \frac{1}{R}\beta_{,2,12} + D_{66} \left( \frac{1}{R^2}\beta_{,1,22} + \frac{1}{R}\beta_{,2,12} \right) \quad (10d)$$

$$- A_{55} (\beta_1 + u_{,3,1}) - m_3 \ddot{\beta}_1 = 0$$

$$D_{66} \left( \beta_{,2,11} + \frac{1}{R}\beta_{,1,12} \right) + D_{12} \frac{1}{R}\beta_{,1,12} + D_{22} \frac{1}{R^2}\beta_{,2,22} \quad (10e)$$

$$- A_{44} \left( \beta_2 + \frac{1}{R}u_{,3,2} \right) - m_3 \ddot{\beta}_2 + \int_{\alpha_3} f_2 \alpha_3 d\alpha_3 = 0$$

여기서, 양단이 단순지지 된 경우와 병진과 회전 변위 모두가 구속된 고정단의 경우에 대한 경계조건은 아래와 같다.

단순 지지 경계조건 (Simply Supported BCs)  
at  $x=0, L$ :

$$A_{11}u_{,1,1} + A_{12} \left( \frac{1}{R}u_{,2,2} + \frac{1}{R}u_3 \right) = 0, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

$$D_{11}\beta_{,1,1} + D_{12} \frac{1}{R}\beta_{,2,2} = 0, \quad \beta_2 = 0$$

at  $\theta=0, 2\pi$ :

$$u_1 = 0, \quad A_{12} \frac{1}{R}u_{,1,1} + A_{22} \left( \frac{1}{R^2}u_{,2,2} + \frac{1}{R^2}u_3 \right) = 0,$$

$$u_3 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad D_{12} \frac{1}{R}\beta_{,1,1} + D_{22} \frac{1}{R^2}\beta_{,2,2} = 0$$

고정단 경계조건(Clamped BCs)

at  $x=0, L$ :

$$u_1 = u_2 = u_3 = \beta_1 = \beta_2 = 0$$

### 2.4 경계조건에 따른 변위함수 선정과 진동해석

위에서 구한 단순지지 경계조건을 만족하는 변위 근사함수<sup>(9)</sup>를 식(11)과 같이 선택한다.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \\ \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \\ \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \\ \cos \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \\ \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \end{Bmatrix} q(t) \quad (11)$$

고정단 경계조건을 만족하는 변위 근사함수<sup>(10)</sup>는 식(12)와 같이 선택할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} 1 - \cos \frac{2m\pi x}{L} \\ \sin n\theta \\ \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \end{Bmatrix} q(t) \quad (12)$$

여기서  $m, n$  은 각각 복합재 원통셀의 축방향과 원주방향의 모드형상의 차수를 의미한다. 확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식(11,12)를 식(7)에 대입하여 정리하면 단순지지와 고정단 경계조건을 만족하는 이산화된 운동방정식을 얻는다.

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K}] \mathbf{q}(t) = 0 \quad (13)$$

식(14)는 감쇠항을 포함하는 운동방정식으로서, 이 식을 아래와 같은 상태방정식으로 변환한다.

$$[\mathbf{M}]^* \dot{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{K}]^* \mathbf{x}(t) = 0 \quad (14)$$

$$\text{여기서, } [\mathbf{M}]^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}, [\mathbf{K}]^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{M}]^*$ ,  $[\mathbf{K}]^*$  는  $2n \times 2n$  대칭행렬이고,  $\mathbf{x}(t)$  는  $2n$  상태 벡터(state vector)이다.  $[\mathbf{M}]^*$ ,  $[\mathbf{C}]^*$ ,  $[\mathbf{K}]^*$  행렬의 요소는 부록에 수록하였다.

여기서,  $n=5 \times M \times N$  이고,  $M$  은 축 방향 모드 수를 나타내고  $N$  은 원주 방향 모드 수를 나타낸다. 식(14)의 해는  $\mathbf{x}(t)=e^{\lambda t} \mathbf{x}$  의 형태를 가지며, 이를 식(14)에 대입하여 아래와 같은 고유치 문제를 유도한다.

$$\lambda [\mathbf{M}]^* \mathbf{x} + [\mathbf{K}]^* \mathbf{x} = 0 \quad (15)$$

여기서,  $\lambda$  는 복소수 고유치로  $\lambda_r = \sigma_r \pm i\omega_{dr}$  으로 표현된다. 여기서  $\sigma_r$  은 시스템의 감쇠를,  $\omega_{dr}$  는 감쇠고유진동수를 의미한다.  $\mathbf{x}$  는 모드형상을 나타내는 고유벡터이다.

식(15)을 변형시키면 식(16)과 같다.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (16)$$

여기서

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{*-1}\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

### 3. 수치해석 및 고찰

수치해석에서 사용된 복합재료의 물성치는 다음과 같다.

$$E_1 = 25E_0, G_{12} = G_{13} = 0.5E_0, G_{23} = 0.2E_0,$$

$$E_3 = E_2, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25, \nu_{23} = 0.01, \rho = 1528.15\text{kg/m}^3$$

$$\alpha_1 / \alpha_0 = 0.1, \alpha_2 / \alpha_0 = 2, \alpha_3 / \alpha_0 = 1,$$

$$E_0 = 5.17 \times 10^9 \text{N/m}^2, \alpha_0 = 10^{-3}, g_0 = 10^8 \text{S/m}^3$$

Table1은 본 연구의 수치해의 검증을 위해 일정 두께를 갖는 원통셀의 반경 대 길이의 비를 2가지 경우로 달리하여 FSDT에 기초한 자유진동해석을

수행하였고 이를 참고문헌<sup>(11)</sup>의 결과와 비교하여 본 연구방법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

Fig. 2는 양단이 고정된 경계조건과 단순지지된 경계조건에서, 자기장의 세기  $B_{0z}^0$  에 따른 반경비에 의 조건을 달리한 감쇠변화와 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. ( $R=10L$ ) 자기장의 세기는 감쇠를 증가시켜 고유진동수를 낮추는 역할을 하며, 이는 감쇠가 자기장의 세기의 제곱에 비례하기 때문이다 (부록참조). 고정단보다 단순지지 경계조건에서 반경비 차이에 대한 감쇠변화가 더 민감하게 반응함을 확인하였다. 결국, 두 경우 모두 자기장의 세기가 증가할수록 고유진동수가 감소하며, 그 값이 0이 되는 지점에 차이가 나타났고, 고정단의 경우가 더 큰 값을 갖는 것을 확인하였다.

Fig. 3은 서로 다른 자기장의 세기에 대하여, 온도구배  $\Theta$  의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 각 경계조건에 대하여 나타내 주고 있다. 두 경우 모두 자기장의 세기와 온도구배가 커질수록 고유진동수는 감소경향을 보이는데, 이는 온도구배에 따라 구조강성이 변화하기 때문이며 강성행렬에 온도구배의 함수인 요소가 존재하기 때문이다 (부록 참조).

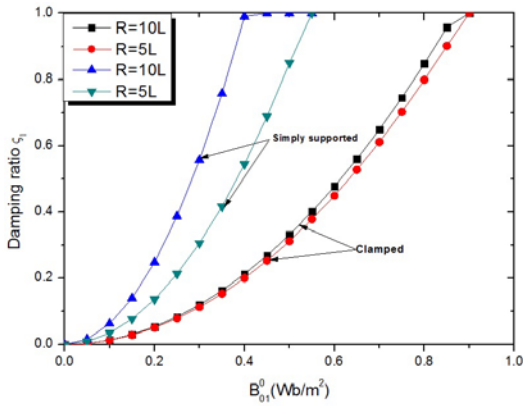
Fig. 4는 각 경계조건에서 서로 다른 온도구배에 대하여, 자기장의 세기의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 보여준다.

예상한 바와 같이 자기장의 세기는 고유진동수를 감소시키며 각 온도구배마다 고유진동수를 0으로 만드는 자기장의 세기 값이 미소한 차이로 존재한다. 또한 온도구배가 작으면 고유진동수를 0으로 만드는 자기장의 세기 값이 커진다. 이는 Fig. 3의 경우와 마찬가지로 자기장의 세기와 온도구배가 각각 감쇠 및 강성 값을 변화시키기 때문이다.

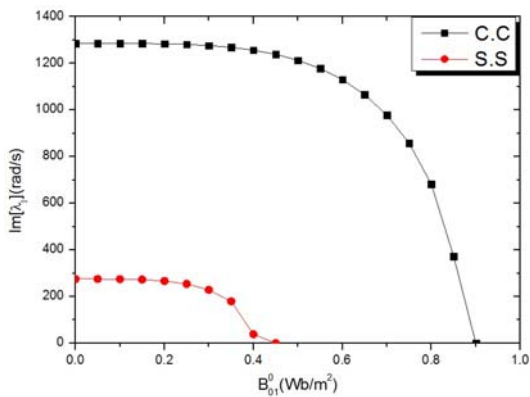
고정단의 경우는 고유진동수의 상대적인 크기 차이로 세 경우 모두 미소한 값의 차이를 가지고 변화됨을 보여주고 있다.

**Table 1 Comparison of natural frequencies (rad/s) with Reference [11],  $[0^\circ \ 90^\circ \ 90^\circ \ 0^\circ]$**

Present	Reference [Reddy]	Difference (%)
<b>Case 1 (<math>R=5L</math>)</b>		0.39%
20.2803	20.361	
<b>Case 2 (<math>R=10L</math>)</b>		0.4%
16.701	16.634	



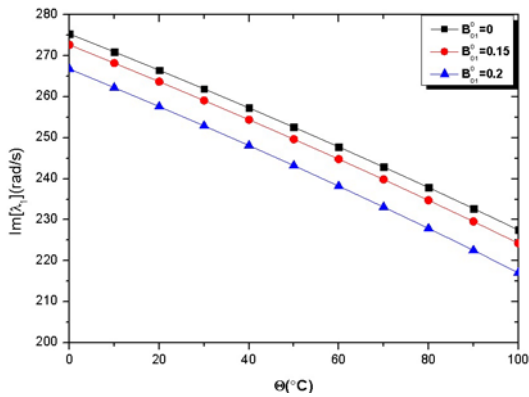
(a) First damping ratio,  $\zeta_1$



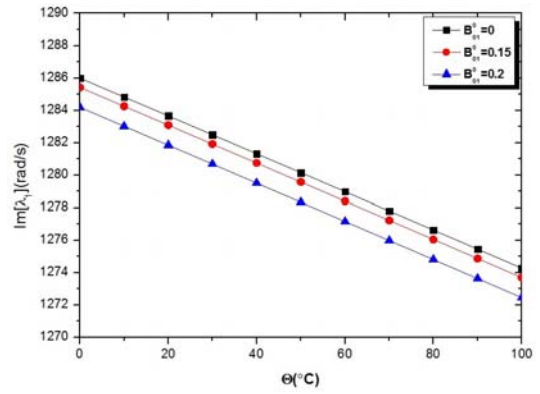
(b) Fundamental natural frequency,  $\text{Im}[\lambda_1]$

Fig. 2 Variation of fundamental natural frequency and damping ratio with  $B_{01}^0$

$$(L = 100h, g_1 / g_0 = g_3 / g_0 = 3.0, g_2 / g_0 = 1.1)$$

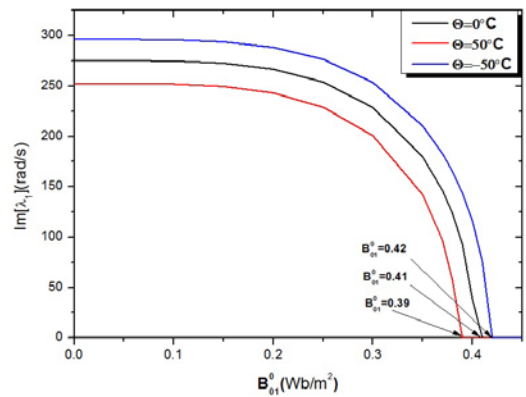


(a) Simply-Supported BCs

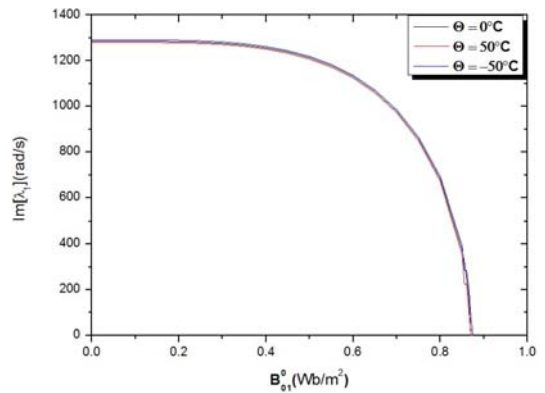


(b) Clamped BCs

Fig. 3 Variation of fundamental natural frequency with  $\Theta$  for different values of  $B_{01}^0$

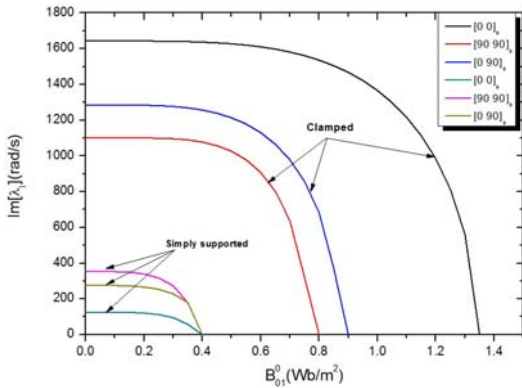


(a) Simply-Supported BCs



(b) Clamped BCs

Fig. 4 Variation of fundamental natural frequency with  $B_{01}^0$  for different values of  $\Theta$



**Fig. 5 Variation of fundamental natural frequency with  $B_{01}^0$  for different stacking sequences**

Fig. 5는 서로 다른 적층방법과 섬유각에 대하여, 자기장의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 각 경계조건에 대하여 보여주고 있다.

단순지지 조건을 갖는 경계조건에서는 진동수의 크기가  $[90^\circ 90^\circ]_s > [0^\circ 90^\circ]_s > [0^\circ 0^\circ]_s$  의 적층형태 순으로 나타났고, 고정단의 경계조건에서는 단순지지와는 다르게  $[0^\circ 0^\circ]_s > [0^\circ 90^\circ]_s > [90^\circ 90^\circ]_s$  의 적층형태순으로 나타났다. 경계조건에 따라서 진동수 변화에 영향을 주는 적층방법이 서로 다를 수 있음을 알 수 있으며, 결국 서로 다른 적층방법과 섬유각은 동적특성 변화에 영향을 주었는데, 이는 섬유각의 변화가 구조강성 변화를 초래하며 이로서 자기장에 더 민감한 적층형태가 존재함을 확인할 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 복합재료 원통셀에 축 방향으로 자기장이 작용할 때, 전자기-열-탄성이 연성된 운동방정식과 경계조건을 Hamilton의 원리를 이용하여 유도하였다. 원통셀의 양단이 단순지지된 조건과 고정된 조건을 만족하는 근사함수를 이용하여 고유치문제를 유도하고 자기장의 세기와 온도구배, 그리고 형상, 크기에 따른 복합재료 원통셀의 자유진동 특성을 고찰하였다. 본 연구를 통하여 외부에서 가해진 자기장이 구조물에 감쇠(damping)를 창출하는 효과를 가져오며 그 크기는 적층방법 및 섬유각에 따라 다를 수 있었다. 또한 양(+ )의 온도구배는 강성행렬의 감소를 초래하여 고유진동특성의 변

화, 즉 고유진동수의 감소를 가져온다. 반대로 음(-)의 온도구배는 강성의 증가를 가져오며 따라서 고유진동수의 증가가 관찰되었다. 이러한 변화 역시 적층방법 및 섬유각의 함수로 나타남을 알 수 있었다. 또한, 고유진동수가 선형적으로 감소되는 온도구배 영향보다 포물선으로 어떤 지점에서 급격히 감소하여 0으로 수렴시키는 자기장 세기가 복합재료 원통셀 구조물 설계에 더 민감한 변수임을 확인할 수 있었다. 단순지지에서 보다 고정된 경계조건에서 상대적으로 고유진동수의 값이 크게 나타났고, 적층방법과 섬유각의 변화에 대한 고유진동수 변화 경향에서의 차이를 제외하고 모든 조건에서 동일한 변화경향을 보여주었다.

#### 참고 문헌

- (1) Dong, S. B., 1986, Free Vibrations of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells, Journal of Acoustical Society of America, Vol.44, pp.1628~1635.
- (2) Jones, R. M. and Morgan, H. S., 1975, Buckling and Vibration of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol.13, No.5, pp.664~671.
- (3) Sadasiva Rao, Y.V.K. and Raju, P.C., 1981, Vibrations of Antisymmetrically Laminated Cylindrical Shells, Development of Composite Material, Vol.74, No.3, pp.331~350.
- (4) Greenberg J.B. and Stavsky, Y., 1981, Vibration of Laminated Filament-Wound Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol.19, No.8, pp.1055~1062.
- (5) Kostas P. Soldatos., 1983, On the Buckling and Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells, Int.J.Engineering Science, Vol.21, No.3. pp.217~222.
- (6) Jang. D.D., 2011, Case Study of Seismic Protection/Vibration Mitigation Technology Development Using Smart Vibration Control Devices, KSSIVC, Vol.13. pp.57~66.
- (7) Kim, S.K., Lee, K.W., Moon, J.K., Choi, J.W., Kim, Y.J., Park, S.Y. and Song, O.S., 2011, Dynamic Characteristics of Composite Plate Subjected to Electromagnetic and Thermal Field, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol.21, No.6, pp.536~545.
- (8) Park, S.Y., Kim, S.K., Choi, J.W., Song, O.S.,

2012, Vibration Analysis of Composite Cylindrical Shells Subjected to Electromagnetic and Thermal Field, Vol.22, No.8, pp.791~799.

(9) Reddy, J.N., 2004, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis 2nd Edition, CRC Press, New York.

(10) Jack R.Vinson., 1992, The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Material, Kluwer Academic Publishers.

(11) Reddy, J.N. and Liu, C.F., 1985, A Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells, International Journal of Engineering Science, Vol.23, No.3, pp.319~330.

## 후 기

이 논문은 2011 년도 교육과학기술부(한국연구재단)의 지원을 받아 수행된 일반연구지원사업(기본연구)임 (20110027000)

## 부 록

**A.1** 식(10)의  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$  행렬,  $A_{11}^\alpha, A_{12}^\alpha, A_{22}^\alpha$  행렬 및 질량계수  $m_1, m_3$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_i} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_i} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

$$A_{11}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_i} [A_{11}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{16}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)}]$$

$$A_{12}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_i} [A_{16}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{66}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)}]$$

$$A_{22}^\alpha = \sum_{k=1}^{N_i} [A_{12}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{22}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)}]$$

$$m_1 = \sum_{k=1}^{N_i} \rho_0^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad m_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_i} \rho_0^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

**A.2** 질량행렬, 감쇠행렬 및 강성행렬

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \int_{\Omega} m_1 \psi_1 \psi_1^T d\Omega \quad C_{22} = (B_{01}^0)^2 \int_{\Omega} h \bar{g}_{33} \psi_2 \psi_2^T d\Omega$$

$$M_{22} = \int_{\Omega} m_1 \psi_2 \psi_2^T d\Omega \quad C_{33} = (B_{01}^0)^2 \int_{\Omega} h \bar{g}_{22} \psi_3 \psi_3^T d\Omega$$

$$M_{33} = \int_{\Omega} m_1 \psi_3 \psi_3^T d\Omega \quad C_{55} = (B_{01}^0)^2 \int_{\Omega} C_{33}^g \psi_5 \psi_5^T d\Omega$$

$$M_{44} = \int_{\Omega} m_3 \psi_4 \psi_4^T d\Omega$$

$$M_{55} = \int_{\Omega} m_3 \psi_5 \psi_5^T d\Omega$$

$$K_{11} = \int_{\Omega} \left( A_{11} \psi_{1,1} \psi_{1,1}^T - \frac{1}{R^2} A_{66} \psi_{1,22} \psi_{1,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{12} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} A_{12} \psi_{1,1} \psi_{2,2}^T - \frac{1}{R} A_{66} \psi_{1,22} \psi_{2,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{13} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} A_{12} \psi_{1,1} \psi_3^T \right) d\Omega$$

$$K_{21} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} A_{12} \psi_{2,2} \psi_{1,1}^T - \frac{1}{R} A_{66} \psi_2 \psi_{1,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{22} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R^2} A_{22} \psi_{2,2} \psi_{2,2}^T - A_{66} \psi_2 \psi_{2,11}^T \right) d\Omega$$

$$K_{23} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R^2} A_{22} \psi_{2,2} \psi_3^T \right) d\Omega$$

$$K_{31} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} A_{12} \psi_3 \psi_{1,1}^T \right) d\Omega$$

$$K_{32} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R^2} A_{22} \psi_3 \psi_{2,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{33} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R^2} A_{22} \psi_3 \psi_3^T - A_{55} \psi_3 \psi_{3,11}^T - \frac{1}{R^2} A_{44} \psi_3 \psi_{3,22}^T \right. \\ \left. + A_{11}^\alpha \Theta \psi_3 \psi_{3,11}^T + \frac{2}{R} A_{12}^\alpha \Theta \psi_3 \psi_{3,12}^T + \frac{1}{R^2} A_{22}^\alpha \Theta \psi_3 \psi_{3,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{34} = - \int_{\Omega} \left( A_{55} \psi_3 \psi_{4,1}^T \right) d\Omega$$

$$K_{35} = - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} A_{44} \psi_3 \psi_{5,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{43} = \int_{\Omega} \left( A_{55} \psi_4 \psi_{3,1}^T \right) d\Omega$$

$$K_{44} = \int_{\Omega} \left( D_{11} \psi_{4,1} \psi_{4,1}^T + A_{55} \psi_4 \psi_4^T - D_{66} \frac{1}{R^2} \psi_4 \psi_{4,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{45} = \int_{\Omega} \left( D_{12} \frac{1}{R} \psi_{4,1} \psi_{5,2}^T - D_{66} \frac{1}{R} \psi_4 \psi_{5,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{53} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R} A_{44} \psi_5 \psi_{3,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{54} = \int_{\Omega} \left( D_{12} \frac{1}{R} \psi_{5,2} \psi_{4,1}^T - D_{66} \frac{1}{R} \psi_5 \psi_{4,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{55} = \int_{\Omega} \left( D_{22} \frac{1}{R^2} \psi_{5,2} \psi_{5,2}^T + A_{44} \psi_5 \psi_5^T - D_{66} \psi_5 \psi_{5,11}^T \right) d\Omega$$

여기서

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^L dx d\theta$$