한국소음진동공학회 2012년 추계학술대회논문집, pp. 231~232

FEM 을 이용한 외팔보 Modal Parameter 의 민감도 해석

The Sensitivity Analysis of Modal Parameter of Cantilever by using FEM

박태상*·정운창*·윤지현*·이정윤**·오재응†
Tae-Sang Park, Un-Chang Jung, Ji-Hyun Yoon, Jung-Yoon Lee and Jae-Eung Oh

1. 서 론

지난 30 여년 동안 기계 시스템의 동적 거동 해석에 관한 연구는 다양한 상용 프로그램의 등장으로 인해 상당한 성과를 거두었다. 그러나 기계 시스템의 설계는 여전히 공학자의 경험이나 공학적인 감각에 의해 수행되어 지고 있다. 즉, 초기 설계치들로부터 해석이 수행되고, 시스템의 성능을 향상하기 위해서, 해석에 근거하여 적절한 설계치를 선정하여 변화시키게 된다. 이런 과정을 시스템이 목적하는 성능을 얻을 때까지 반복한다. 만약, 설계 변경에 대한 전체 시스템의 효과를 설계자가 올바로 인식할 수 있도록 정보를 제공한다면, 반복적인 설계 과정을 줄여 줄 수 있으므로 설계에 걸리는 시간을 상당히 절약할 수 있을 것이다.

최근 설계 분야에서 최적설계는 많은 발전을 거두었으며, 공학 관련 분야에 활발히 적용되고 있다. 특히 구조해석 분야에서는 유한요소 프로그램들과 어울려 상당한 설계 효과를 거두고 있다. 그러나, 기계 시스템의 설계에 대한 적용에서는 제한적으로 이용되고 있다. 기계 시스템의 최석설계를 위해서는 동특성 해석, 민감도 해석, 그리고 최적화의 과정이 연결될 필요성이 있다. 본 연구에서는 FEM 을 이용하여 동특성 해석을 통한 민감도 해석을 수행하였다.

2. 외팔보의 동특성 해석.

2.1 외팔보의 질량 및 강성 행렬 도출.

외팔보의 상하 진동(굽힘 진동)에 대한 질량, 강성 행렬은 다음과 같다.

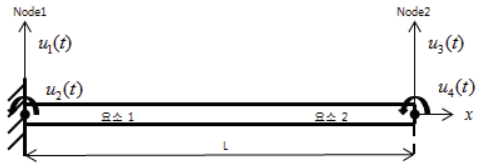

Fig.1 외팔보 유한요소 모델

u_1 과 u_3 은 횡방향 변위를 나타낸다. 빔요소의 횡방향 변위에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]=0 \tag{1}$$

이때 탄성계수와 관성모멘트가 일정하면 u_{xxxx} 가 0 이 되고 이를 적분하면

$$u(x,t)=c_1(t)x^3+c_2(t)x^2+c_3(t)x+c_4(t) \tag{2}$$

와 같으며 상수는 위의 경계조건을 만족하고, 이때 식(2)로부터 적분상수를 절점변위로 나타내면

$$c_4(t)=u_1(t),\quad c_3(t)=u_2(t),$$

$$c_2(t)=\frac{1}{l^2}\left[3(u_3-u_1)-l(2u_2+u_4)\right] \tag{3}$$

$$c_1(t)=\frac{1}{l^3}\left[2(u_3-u_1)-l(2u_2+u_4)\right]$$

과 같이 표현하고 이 식을 식(2)에 대입하고 절점변위의 계수항으로 정리하면

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\left[1-3\frac{x^3}{l^2}+2\frac{x^3}{l^3}\right]u_1(t)+l\left[\frac{x}{l}-2\frac{x^2}{l^2}+\frac{x^3}{l^3}\right]u_2(t)\\&+\left[3\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}\right]u_3(t)+l\left[-\frac{x^2}{l^2}+\frac{x^3}{l^3}\right]u_4(t)\end{aligned} \tag{5}$$

가 된다. 이때 질량항렬은 절점 변위와 빔의 운동에너지를 이용하여 구할 수 있다.

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left[u_t(x,t)\right]^2 dx \tag{6}$$

이며, $T(t)=\frac{1}{2}\dot{u}^T M\dot{u}$ 로 표현 가능하다.

M 은 질량 행렬이며, $\dot{u}$ 는 절점변위벡터를 시간

† 교신저자; 한양대학교 기계공학부
E-mail : jeoh@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2220-0452, Fax : (02) 2299-3153
* 한양대학교 기계공학과
** 경기대학교 기계시스템공학과

에 대해 미분한 것이다. 위 식들을 식(6)의 형태로 나타내면 보 요소의 질량 행렬은

$$M = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

강성행렬의 경우도 보의 변형에너지를 이용하여 같은 방법으로 구하면

$$K = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

각 요소의 강성 및 질량행렬은 총 길이 l 에 요소 개수를 나누어 주면 구할 수 있고, 요소의 중첩원리로 전역 강성 및 질량행렬을 구할 수 있다.

위 질량과 강성 행렬을 이용하여 고유치와 고유벡터를 도출 할 수 있다.

2.2 외팔보의 Modal parameter 의 민감도 해석.

외팔보의 구조 변경에 의한 고유치 민감도 해석의 수식은 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=\{F\} \tag{9}$$

$\{X\}$ 는 물리좌표계 이다. 구조가 변경될 경우

$$[M+\Delta M]\{\ddot{X}\}+[c]\{\dot{X}\}+[k]\{X\}=\{F\} \tag{10}$$

ΔM 는 질량 변경량이다. 이때 식(10)의 물리좌표계를 모드좌표계로 변경하여 직교성을 이용하면

$$\left.\begin{aligned} & [\bar{m}]\{\ddot{Z}\}+[\bar{c}]\{\dot{Z}\}+[\bar{k}]\{Z\}=\{\phi\}^T\{F\} \\ & [\bar{m}]=\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & I & \\ & & \ddots \end{bmatrix}+\underbrace{[\phi]^T[\Delta M][\phi]}_{\text{변경 분}} \\ & [\bar{c}]=\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\zeta\Omega & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\ & [\bar{k}]=\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \Omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

m 차원의 방정식으로 축소

ζ, Ω : 구조변경 전 감쇠비, 고유진동수

식(11)을 이용하여 특성 방정식을 고려하면

$$\det\left|\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & I & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\zeta\Omega & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \Omega & \\ & & \ddots \end{bmatrix} - [\phi]^T[\Delta M][\phi]\lambda^2\right| = 0 \tag{12}$$

이며, 민감도를 계산하기 위한 질량 변경량을 식(6)에 의해 구할 수 있다.

$$\Delta M_i = \frac{-\left(\lambda_k^2 - 2\zeta_k\Omega_k\lambda_k - \Omega_k^2\right)}{[\phi_{ik}]^T[\phi_{ik}]\lambda_k^2} \tag{13}$$

비감쇠를 고려하기 위하여 감쇠항을 소거하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\Delta M_i = \frac{\Omega_k^2 - \lambda_k^2}{[\phi_{ik}]^T[\phi_{ik}]\lambda_k^2} \tag{14}$$

따라서, 밀도 2800 kg/m^3 탄성계수 $70Gpa$ 프아송비 0.3 총 길이 0.4 m 폭 0.04 m 두께 0.003 m 인 외팔보를 대상으로 5 차 굽힘 모드의 고유치를 30Hz shift 시키기 위한 민감도 해석을 수행하였다.

식(14)을 이용하여 질량 변경량을 구하면 5 번 절점에 1.5g 의 질량 추가 정보를 얻을 수 있으며 결과는 다음과 같다.

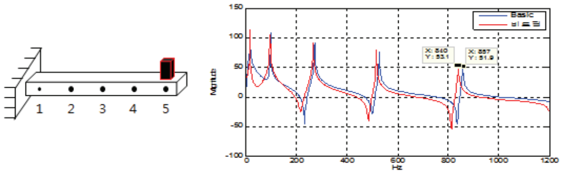

Fig.2 외팔보 민감도 해석 결과

3. 결 론

본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 민감도 이론결과와 민감도 시뮬레이션 결과를 비교 하였다..

(2) 외팔보의 민감도 해석을 통하여 외팔보의 민감한 부분을 규명하였다.

참고문헌

(1) 오재응, 1985, “구조물 모우드 해석의 기초와 응용”, 희성출판사 ,pp.102-107, 176-177, 215-219.

(2) Daniel J. Inman, 2002, “Engineering vibration third edition”, 피어슨 에듀케이션. pp. 580-590.

(3) 강희종, 1991, “자동차 엔진마운트계의 동특성 개선을 위한 고유모드 감도해석 및 구조변경”, 한양대학교 석사학위 논문.