

이동하중을 받는 보의 진동응답을 줄이는 방법

Reduction of Vibration Responses of a Beam Subjected to Moving Loads

이건명† · 주영호* · 박문수**

Gun-Myung Lee, Young-Ho Ju and Mun-Soo Park

Key Words : Bridge(다리), Vibration(진동), Vehicle(차량), Moving Load(이동 하중), Finite Element Method(유한요소법)

ABSTRACT

The responses of a bridge due to a moving vehicle are obtained analytically by modeling a vehicle as a constant point force. From the results it is found that the responses after a vehicle leaves the bridge become very small for some speeds of a vehicle. When a vehicle is modeled as a two dof system for a more accurate analysis, the same phenomenon is observed while the roughness of the bridge is small. Determining the fundamental frequency of a bridge so that one of the above speeds coincides with a frequent speed of vehicles, the responses of a bridge can be minimized.

1. 서 론

다리는 종종 많은 교통량으로 인하여 심하게 진동을 하고, 이러한 현상은 현대의 경간이 긴 다리에서 더욱 심각하다. 교통하중으로 인한 다리의 동적 응답을 연구하기 위하여 해석적, 수치적, 또는 실험적인 방법을 사용하여 활발한 연구가 수행되었다. 차량과 다리의 상호작용은 이동하중 문제의 한 예로 다루어 졌다⁽¹⁾. 고속 열차로 인한 이동하중을 받는 다리의 동적 응답이 고려되었다⁽²⁾. 서로 반대방향으로 움직이는 두 차량으로 인한 응답을 계산하기 위하여 간단한 점하중 모형이 사용되었다⁽³⁾. 연속적인 트러스형 다리의 공진 응답을 줄이기 위하여 광대역 다중 동조질량감쇠기(tuned mass damper)가 개발되었다⁽⁴⁾. 바람 부는 조건하에서 차량들이 이동하는 긴 경간 다리의 응답을 계산하기 위한 해석적 모형이 개발되었다⁽⁵⁾.

다수의 차량으로 인한 다리의 진동을 다룬 연구는 다음과 같다. Frýba 는⁽⁶⁾ 균일한 간격 d 와 일정한 속력 v 를 갖는 동일한 하중의 무한 연쇄를 받는

보를 연구하여 정상상태 진동응답은 연속적인 두 이동하중간의 시간 간격이 보의 자유진동 주기나 그의 정수배와 같을 때 최대가 됨을 밝혔다. Yang 등은^(7,8) 철로 다리에서 기차가 유발하는 진동의 공진과 소멸(cancellation) 현상을 연구하였다. Wang 등은⁽⁹⁾ 기차가 유발한 다리의 진동을 줄이기 위하여 수동 동조질량감쇠기를 사용하는 방안의 가능성을 연구하였다. Samani 등은⁽¹⁰⁾ 규칙적인 간격의 이동하중의 무한 연쇄를 받는 단순지지보의 진동을 줄이기 위한 동적 흡진기의 성능을 평가하였으며 그의 연구에서 선형뿐 아니라 비선형 흡진기도 고려하였다.

본 논문에서는 다리를 단순지지 Euler-Bernoulli 보로 모형화하고, 차량을 이동하는 힘으로 단순화하여 다리의 진동응답을 해석적으로 구할 것이다. 이로부터 차량의 특별한 속력에 대하여 다리의 진동응답이 매우 작아지는 것을 보일 것이다. 이러한 결과가 차량을 질량-스프링-감쇠기계로 모형화 하였을 때와 다리 노면의 거칠기를 포함하였을 때에도 성립하는 지를 고찰할 것이다.

2. 다리의 동적 응답 계산

2.1 차량을 집중하중으로 모형화

차량으로 인한 다리의 동적 응답을 계산하기 위하여 다리는 단순지지 Euler-Bernoulli보로, 그리고

† 교신저자; 정회원, 경상대학교 공학연구원
E-mail : gmlee@gnu.ac.kr
Tel : 055-772-1621, Fax : 055-772-1577
* 두산중공업
** 한국폴리텍VII대학

차량은 크기가 일정한 집중하중으로 모형화하였다. Fig. 1은 단순지지보 위에서 v 의 속력으로 움직이는 크기 F_0 의 집중하중을 보이고 있다. 이 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x - vt)F_0 \quad (1)$$

이때 w, E, I, ρ, A, x, t 는 각각 보의 수직 변위, Young률, 단면의 관성모멘트, 밀도, 단면적, 보를 따라 측정된 길이, 시간을 나타낸다. 변위는 정규모드의 합으로써 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = \sum_r W_r(x)q_r(t) \quad (2)$$

이때 $W_r(x)$ 는 r 번째 모드의 모드형을 나타내고, 길이 L 의 단순지지보에 대하여 $\sin \frac{r\pi x}{L}$ 가 된다. 식 (2)를 (1)에 대입하고, 식 (1)의 양변에 $W_s(x)$ 를 곱한 후, 0부터 L 까지 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{2F_0}{\rho AL} W_r(vt) \quad (3)$$

이때 ω_r 은 r 번째 모드의 고유진동수를 나타낸다. 초기조건을 0으로 놓고, 위 방정식을 풀면 다음과 같다.

$$q_r(t) = \frac{1}{\omega_r^2 - (\frac{r\pi v}{L})^2} \frac{2F_0}{\rho AL} \left[\sin \frac{r\pi vt}{L} - \frac{r\pi v}{\omega_r L} \sin \omega_r t \right] \quad (4)$$

식 (4)를 (2)에 대입하면 보의 수직변위를 얻는다.

차량이 다리를 떠나는 순간 t 는 L/v 가 되고, 이때 식 (4)의 $q_1(t)$ 는 다음과 같게 된다.

$$q_1(L/v) = \frac{1}{\omega_1^2 - (\frac{\pi v}{L})^2} \frac{2F_0}{\rho AL} \left[\sin \pi - \frac{\pi v}{\omega_1 L} \sin \omega_1 \frac{L}{v} \right] \quad (5)$$

만약 $\frac{\omega_1 L}{v} = 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$ 이면 위 식의 대괄호안의 부분은 0이 된다. 또한 $q_1(L/v)$ 도 0이 됨을 보일 수 있다. 이 사실은 이 시각 이후의 첫번째 모드의 응답은 0이 됨을 의미한다. 다리의 응답에서 첫번째 모드가 지배적이고, 고차 모드의 영향이 무시할 만하다면 차량이 다리를 지난 후 다리의 응답은 0이 되어 진동이 없을 것이다. $\frac{\omega_1 L}{v} = \pi$ 이면 ω_1 은 $\pi v/L$ 이 되고, $q_1(L/v)$ 는 0의 부정형이 되어 0이 아닌 극한값을 갖는다. 따라서 이 경우에 다리의 응답은 차량이 다리를 지난 후 0이 되지 않는다. 차량이 통과한 후 다리의 응답이 0이 되는 이상의 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v = \frac{\omega_i L}{(2i+1)\pi}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Yang 등은^(7,8) 기차의 바퀴 하중이 유발한 철로 다리의 동적 응답을 연구하여 위의 속도에서는 철로 다리에 공진이 발생하지 않는다는 사실을 밝히고, 이 현상을 ‘소멸(cancellation)’이라고 명명하였다. 이 현상은 다음과 같이 설명될 수 있다. 기차가 유발한 다리의 동적 응답은 각각의 바퀴 하중으로 인한 응답을 중첩하여 구할 수 있고, 다리의 첫번째

모드가 전체응답을 지배한다고 가정하면 기차가 위의 속력으로 움직일 때 각각의 바퀴 하중으로 인한 응답은 바퀴가 다리를 떠난 후 0이 될 것이다. 따라서 다리의 전체응답은 다리 위에 놓여 있는 몇 개의 바퀴 하중으로 인한 응답만의 합이므로 그다지 커지지 않을 것이다.

다리의 감쇠를 고려하였을 때의 응답은 유사한 방법으로 계산할 수 있다. 그러나 그 결과의 유도 과정은 생략한다.

2.2 차량을 2자유도계로 모형화

차량으로 인한 다리의 응답을 보다 더 정확하게 해석하기 위하여 차량을 실제에 가깝도록 Fig. 2와 같이 2자유도계로 모형화하였다. 그림에서 하첨자 ‘b’와 ‘w’는 각각 차체(body)와 바퀴(wheel)를 의미한다. 이때 차체와 바퀴의 운동방정식은 식 (7)과 (8)로, 그리고 다리의 운동방정식은 식 (9)로 나타낼 수 있다.

$$m_b \ddot{y}_b + c_b (\dot{y}_b - \dot{y}_w) + k_b (y_b - y_w) = 0 \quad (7)$$

$$m_w \ddot{y}_w + m_b \ddot{y}_b + c_w (\dot{y}_w + \dot{w}) + k_w (y_w + w) = 0 \quad (8)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x - vt)F(t) \quad (9)$$

식 (9)의 c 는 다리의 감쇠를 나타내고, 다리에 작용하는 힘 $F(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F(t) = (m_b + m_w)g + m_w \ddot{y}_w + m_b \ddot{y}_b \quad (10)$$

이 방정식들을 풀기 위하여 유한요소법을 사용하였다. 다리는 길이가 일정한 보요소로 나누었다. 각 요소의 질량행렬과 강성행렬을 결합하고, 경계조건을



Fig. 1 A beam and a moving force.

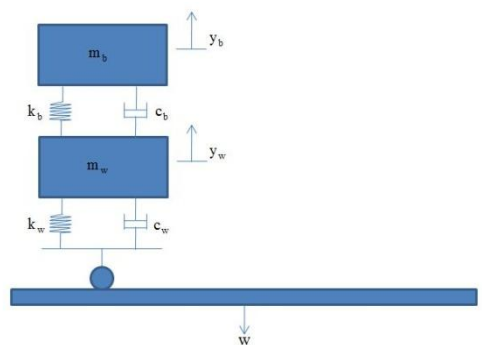


Fig. 2 A two degree-of-freedom model of a vehicle.

고려하여 다리의 질량행렬과 강성행렬을 구하였다. 다리의 감쇠는 다음과 같은 Rayleigh 감쇠를 가정하였다.

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (11)$$

이때 \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} 는 각각 다리의 질량, 강성, 감쇠행렬을 나타내고, a 와 b 는 상수이다. 이들 상수는 다음과 같이 고유진동수, 감쇠비와 관련되므로 두 개 모드의 고유진동수와 감쇠비를 구하면 이로부터 이들 상수를 계산할 수 있다.

$$a + b\omega_r^2 = 2\zeta_r\omega_r \quad (12)$$

다리의 질량, 강성, 감쇠행렬에 적절한 행과 열을 추가하여 식 (7), (8), (9)를 나타내도록 하였다. 유한요소법에서 힘벡터는 각 요소의 절(node)에 작용하는 힘을 나타낸다. 그러나 차량이 다리 위를 움직일 때 다리에 작용하는 힘은 일반적으로 요소의 절에 작용하지 않으므로 이 힘은 Fig. 3에서 보이는 것처럼 요소의 두 절에 작용하는 힘으로 분해하였다.

전체시스템의 질량, 강성, 감쇠행렬과 힘벡터를 구하면 운동방정식은 2차 미분방정식으로 나타난다. 이 방정식을 풀기 위하여 여러 가지 방법 중에서 사용하기 간편한 Newmark법을⁽¹¹⁾ 사용하였다. 이 방법에서 사용되는 상수인 α 와 β 는 해가 발산하지 않도록 $\alpha = 1/4$ 와 $\beta = 1/2$ 가 사용되었다.

다리의 노면이 매끄럽지 않을 때는 노면의 거칠기 y_r 을 운동방정식에 포함하였다. y_r 의 방향은 수직 위쪽을 양으로 정의하였다. y_r 을 포함하면 운동방정식은 식 (8)만 다음 식과 같이 변화한다.

$$m_w\ddot{w} + m_b\ddot{y}_b + c_w(\dot{w} + \dot{w}) + k_w(y_w + w - y_r) = 0 \quad (13)$$

3. 동적 응답의 수치 계산

3.1 차량을 집중하중으로 모형화한 경우

앞에서 설명한 다리의 동적 응답 계산 방법을 실제 다리에⁽²⁾ 적용하였다. 이 다리의 치수와 재료 성질은 다음과 같다. $E = 3.303 \times 10^{10}$ N/m², $I = 18.638$ m⁴, $\rho = 3852$ kg/m³, $A = 11.332$ m², $L = 40$ m. 실제 이 다리는 $L = 40$ m의 세 경간(span)을 가지고 있지만 본 논문에서는 그 중 한 경간만을 고려하였다. 다리는 단순지지보로 취급하였고, 처음 5개의 고유진동수는 23.165, 92.661, 208.487, 370.644, 579.132 rad/s이었다. 다리의 감쇠를 고려하기 위하여 처음 5개 모드의 감쇠비를



Fig. 3 The force is distributed between two nodes.

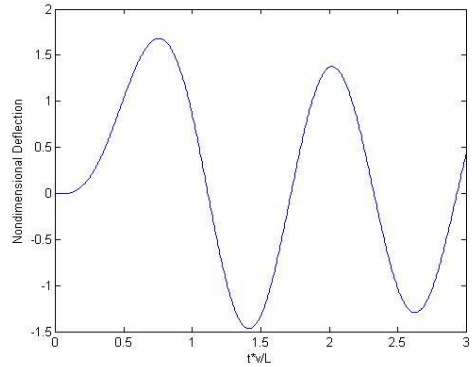


Fig. 4 Deflections at the mid-span of the bridge when $v = 179$ m/s.

임의로 2%로 정하였다. 차량으로 인한 집중하중은 10,000 N으로 정하였다.

차량으로 인한 다리의 동적 응답을 2.1절에서 설명한 방법으로 구하였다. 차량이 다리에 진입한 초기에는 다리의 중앙으로부터 진입부쪽으로 이동한 점에서 다리의 처짐이 최대가 된다. 시간이 지남에 따라 처짐이 최대가 되는 점이 다리의 중앙쪽으로 이동하고, 차량이 다리를 떠날 때까지 중앙 주위에서 처짐이 최대가 된다. 차량의 속력을 변화시키면서 다리 중앙에서의 최대 처짐을 반복적으로 계산하여 속력 $v = 179$ m/s일 때 중앙에서의 처짐이 최대가 됨을 밝혔다. 이때의 다리 중앙에서의 무차원 처짐은 1.682이고, 무차원 처짐은 동적 처짐량을 다리 중앙에 차량의 무게가 정적으로 작용할 때의 처짐량으로 나눈 값으로 정의하였다. 차량이 이 속력으로 움직일 때 다리 중앙에서의 무차원 처짐의 변화를 Fig. 4에 나타내었다. 이 그림의 가로축은 무차원 시간을 나타내고, 이는 실제 시간을 차량이 다리를 통과하는데 걸리는 시간으로 나눈 값이다. 따라서 무차원 시간이 1인 시점은 차량이 다리를 떠나는 순간을 나타낸다. 이 그림을 보면 차량이 다리를 통과한 후에도 다리의 처짐이 상당히 크고, 이 처짐은 다리의 감쇠로 인하여 시간이 지남에 따라 그 진폭이 감소하는 것을 알 수 있다. 식 (2)를 구성하는 각 모드의 응답성분을 다리의 중앙에서 계

산하고, 그 응답성분의 rms값을 계산하였다. rms값은 첫번째 모드에 대하여 2.1344×10^{-5} m이었고, 세번째, 다섯번째 모드에 대하여는 첫번째 모드에 대한 값의 각각 0.53%와 0.066%이었다. 식 (2)를 살펴보면 다리 중앙($x = L/2$)에서 두번째와 네번째 모드의 성분은 0이 됨을 알 수 있다. 이 사실로부터 차량으로 인한 다리의 응답은 첫번째 모드 성분이 지배적임을 알 수 있고, 이는 식 (6)을 유도하는데 사용되었던 가정이 타당함을 의미한다.

$v = 59.0$ m/s는 식 (6)을 만족하는 속력이다. 이 속력에 대한 다리의 응답을 계산하여 Fig. 5에 나타내었다. 이 그림에 나타난 결과는 Fig. 4에 나타난 결과와 대조적으로 차량이 다리를 통과한 후의 응답이 매우 작음을 알 수 있다. 응답이 매우 작기는 하지만 완전히 0이 되지는 않는다. 그 이유는 다리의 응답을 첫번째 모드가 지배하기는 하지만 고차 모드의 영향이 완전히 0이 되지는 않기 때문이다. 또 하나의 이유는 다리에 감쇠가 포함되었기 때문이다. 다리에 감쇠가 없을 때는 차량이 다리를 통과한 후 첫번째 모드의 응답이 0이 되지만 감쇠가 있을 때는 완전히 0이 되지 않는다.

차량이 다리를 통과한 후 다리 중앙에서의 최대 처짐을 속력 v 를 변화시켜가며 계산하여 그 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 이 그림은 식 (6)이 의미하는 것처럼 다리의 주어진 기본진동수 ω_1 에 대하여 여러 속력에서 다리의 처짐이 매우 작아지는 현상을 보이고 있다. 이 속력이 큰 경우에는 속력이 조금만 변화하여도 다리의 처짐이 급격하게 증가한다. 반면 이 속력이 작은 경우에는 속력에 변화가 생기더라도 다리의 처짐에 큰 변화가 생기지 않으므로 다리의 응답이 안정적이다. 다리를 설계할 때 차량의 일반적인 주행속도가 식 (6)을 만족하도록 다리의 기본진동수를 설계하고, 이 식을 만족하는 여러 속력 중에서 작은 값이 되도록 하는 것이 바람직하다. 바꾸어 말하면 다리의 기본진동수를 가능한 크게 하면서 주행속도가 이 식을 만족하도록 다리를 설계하는 것이 바람직하다.

3.2 차량을 2자유도계로 모형화한 경우

차량을 보다 정확하게 모형화하였을 경우에도 식 (6)의 관계식이 성립하는지 확인하기 위하여 차량을 2자유도계로 모형화하고 2.2절에서 설명한 유한요소법으로 다리와 차량의 응답을 해석하였다. 다리는 길이가 일정한 10개의 요소로 나누었다. 다리의 감쇠는 3.1절에서와 같이 처음 5개 모드의 감쇠비를 2%로 정하였다. 차량의 2자유도 모형의 질량,

강성, 감쇠값은 Table 1에 수록한 값을 사용하였다.

차량이 $v = 59.0$ m/s의 속력으로 움직일 때 차량을 2자유도계로 모형화하고 유한요소법으로 해석한 다리의 응답과 차량을 집중하중으로 모형화하고 해석적인 방법으로 구한 다리의 응답을 Fig. 7에 비교하였다. 다리의 응답은 무차원 처짐으로 나타내었고, 시간 역시 무차원 시간으로 나타내었다. 그림을 살펴보면 두 방법으로 구한 응답이 거의 일치함을 알 수 있다. 이는 다리의 노면이 매끄러우면 움직이는 차량으로 인한 다리의 응답은 차량을 집중하중으로 모형화한 경우나 차량을 2자유도계로 모형화한 경우에 거의 일치함을 의미한다. 따라서 차량을 2자유도계로 모형화하여 다리의 응답을 보다 정확하게

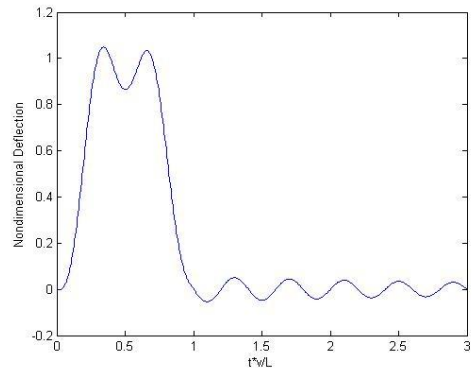


Fig. 5 Deflections at the mid-span of the bridge when $v = 59.0$ m/s.

Table 1 Parameters of a vehicle

m_b	17000 kg	m_w	2382 kg
k_b	5.0×10^6 N/m	k_w	1.0×10^7 N/m
c_b	8.0×10^4 Ns/m	c_w	8.0×10^4 Ns/m

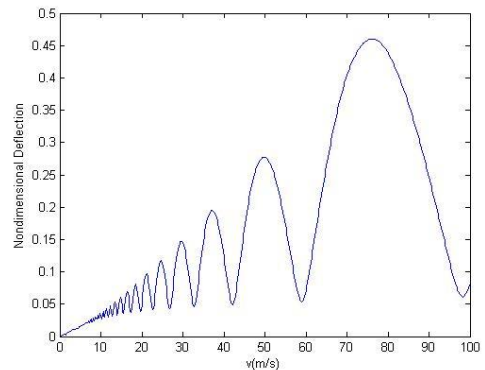


Fig. 6 Variation of the maximum deflections at the mid-span of the bridge with the speed of a vehicle.

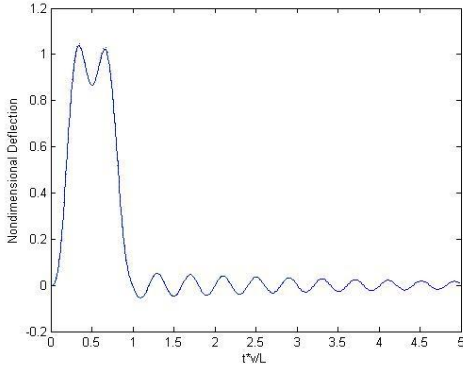


Fig. 7 Comparison of the deflections obtained by using a 2 dof model(solid) and a constant force model(dotted).

해석하더라도 식 (6)의 관계식이 성립함을 알 수 있다.

다리의 노면이 매끄럽지 않은 실제의 경우를 고려하기 위하여 노면에 정규분포의 불규칙수로 나타내어 지는 거칠기를 더하였다. 거칠기의 표준편차가 0.02 m이고, 차량이 $v = 59.0$ m/s의 속력으로 움직일 때의 다리의 응답을 유한요소법을 사용하여 구하고, 그 결과를 Fig. 8에 나타내었다. 차량이 다리 위를 지나는 동안 다리의 응답이 노면이 매끄러운 경우보다 커졌고, 차량이 다리를 통과한 후에는 다리의 응답이 더 이상 매우 작지 않음을 알 수 있다. 이는 예측할 수 있는 결과이다.

노면의 거칠기가 불규칙하므로 다리의 응답은 시뮬레이션을 수행할 때마다 다른 값을 갖게 된다. 따라서 시뮬레이션을 수행하여 차량이 다리 위에 있는 동안의 다리의 최대 처짐과 차량이 다리를 통과한 후의 다리의 최대 처짐을 구하고, 시뮬레이션을 20회 반복하여 최대 처짐의 평균을 구하였다. Fig. 9은 노면 거칠기의 표준편차에 대한 최대 처짐의 변화를 나타내고 있다. 이때 최대 처짐은 무차원으로 나타내었고, 두 개의 최대 처짐은 각각 차량이 다리 위에 있는 동안의 최대 처짐과 차량이 다리를 통과한 후의 최대 처짐을 의미한다. 이 그림을 살펴보면 노면의 거칠기가 커짐에 따라 두 개의 최대 처짐이 증가하고, 특히 차량이 다리를 통과한 후의 다리의 최대 처짐은 급격하게 증가함을 알 수 있다. 이로써 노면의 거칠기가 작은 경우에는 식 (6)의 관계식으로 주어진 속력에서 다리의 응답이 작지만 거칠기가 커지면 다리의 응답은 더 이상 작지 않게 된다고 결론지을 수 있다.

여러 대의 차량이 동일한 속력으로 다리를 지날

때 다리의 응답은 각각의 차량이 다리를 지날 때의 응답을 구하고, 이를 더함으로써 구할 수 있으므로 다리의 응답은 다리 위에 있는 차량으로 인한 응답과 다리를 통과한 차량으로 인한 응답을 더하여 구한다. 그런데 노면의 거칠기가 작은 경우에 차량이 특정한 속력으로 움직이면 차량이 다리를 통과한 후의 응답이 작아지므로 결과적으로 전체 응답도 작아진다. 이러한 조건은 철로 다리에서 쉽게 만족시킬 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 다리를 단순지지보로 모형화하고, 차량을 크기가 일정한 집중하중으로 모형화하여 다리의 응답을 해석적으로 구하고 그 결과로부터 차량의 특정한 속력에서 다리의 응답이 매우 작아지는 현상을 보였다. 이 현상은 차량을 2자유도계로

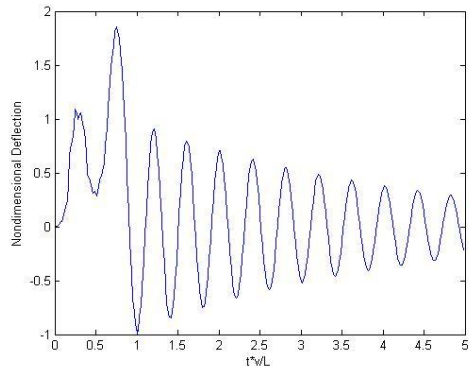


Fig. 8 Deflections at the mid-span of the bridge when the surface of the bridge is not smooth.

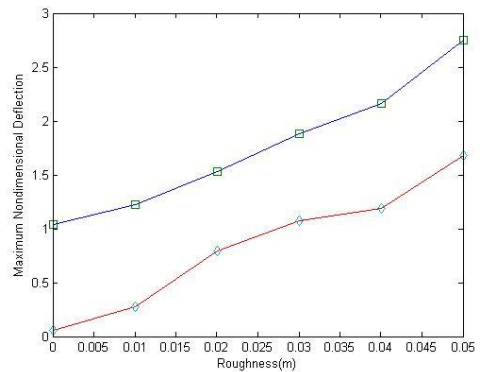


Fig. 9 Maximum deflections at the mid-span of the bridge while a vehicle is on the bridge(square) and after a vehicle leaves the bridge(diamond).

모형화하여 보다 정확하게 다리의 응답을 구하였을 때에도 나타났다. 그러나 다리 노면의 거칠기가 커지면 이 현상은 더 이상 나타나지 않았다. 이러한 결론은 여러 대의 차량이 동일한 속력으로 다리를 지날 때에도 성립한다.

다리를 설계할 때 일반적인 주행속도가 이 특정한 속력이 되도록 다리의 기본진동수를 결정함으로써 다리의 응답을 최소화할 수 있을 것으로 기대한다.

후 기

이 연구는 BK21사업의 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Ouyang, H., 2011, Moving-Load Dynamic Problems: A Tutorial (with a Brief Overview), *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 25, pp. 2039~2060.
- (2) Kwon, H. C., Kim, M. C. and Lee, I. W., 1998, Vibration Control of Bridges under Moving Loads, *Computers & Structures*, Vol. 66, pp. 473~480.
- (3) González, A., O'Brien, E. J., Cantero, D., Li, Y., Dowling, J. and Žnidarič, A., 2010, Critical Speed for the Dynamics of Truck Events on Bridges with a Smooth Road Surface, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 2127~2146.
- (4) Yau, J.-D. and Yang, Y.-B., 2004, A Wideband MTMD System for Reducing the Dynamic Response of Continuous Truss Bridges to Moving Train Loads, *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 1795~1807.
- (5) Chen, S. R. and Wu, J., 2008, Performance Enhancement of Bridge Infrastructure Systems: Long-Span Bridge, Moving Trucks and Wind with Tuned Mass Dampers, *Engineering Structures*, Vol. 30, pp. 3316~3324.
- (6) Fryba, L., 1972, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Noordhoff International Publishing, The Netherlands.
- (7) Yang, Y. B., Yau, J. D. and Hsu, L. C., 1997, Vibration of Simple Beams due to Trains Moving at High Speeds, *Engineering Structures*, Vol. 19, pp. 936~944.
- (8) Yang, Y. B., Lin, C. L., Yau, J. D. and Chang, D. W., 2004, Mechanism of Resonance and Cancellation for Train-Induced Vibrations on Bridges with Elastic Bearings, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 269, pp. 345~360.
- (9) Wang, J. F., Lin, C. C. and Chen, B. L., 2003, Vibrations Suppression for High-speed Railway Bridges Using Tuned Mass Dampers, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 465~491.
- (10) Samani, F. S. and Pellicano, F., 2012, Vibration Reduction of Beams under Successive Traveling Loads by Means of Linear and Nonlinear Dynamic Absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 2272~2290.
- (11) Rao, S. S., 2004, *Mechanical Vibrations*, Pearson Education, Inc., New Jersey.