랜덤, 교차, 지분인자 모형에 의한 고정인자 분할구 실험설계의 생성
Generation of Split Plot Design of Fixed Factors by Random, Crossed, and Nested Models

최 성 운*
Sung-Woon Choi*

Abstract

The paper reviews three Split Plot Designs (SPDs) of fixed factors, and those are SPD (RCBD, RCBD), SPD (CRD, RCBD) and SBD (Split Block Design). RCBD (Randomized Complete Block Design) and CRD (Completely Randomized Design) are used to deploy whole plot and sub plot. The models explained in this study are derived from random, crossed and nested models.
Keywords : Split Plot Design, RCBD, CRD, Split Block Design, Random, Crossed and Nested Model

1. 서 론

정밀화학, 정유 등 장치산업에서 신제품개발 또는 공정개선 시 공정제어 조건인 온도, 압력 등의 고정인자(Fixed Factor)를 랜덤화하기 어려운 경우(Hard to Control), 이 인자를 Whole Plot(WP)에 지분(Nested) 배치하는 방법이 분할구 설계(Split Plot Design SPD)이다. SPD는 품질 실험설계에서 시간과 비용을 절약하는 오차 제어 설계(Error Control Design) 방법으로 Whole Plot과 Sub Plot에 RCBD(Randomized Complete Block Design), CRD(Completely Randomized Design), SBD(Split Block Design)를 배치하며 3개로 분할구로 설계될 경우 SSPD(Split SPD)라 한다.[2,5,6]
마케팅, 교육 분야에서 설문대상자의 행위측정(Behavioral Measurement) 시 자기가 관심 있는 인자를 주로 분석하고자 할 경우 품질 실험설계에서와 같이 SPD를 위한 지분 교차인자 모형을 사용한다.[1,3,4]

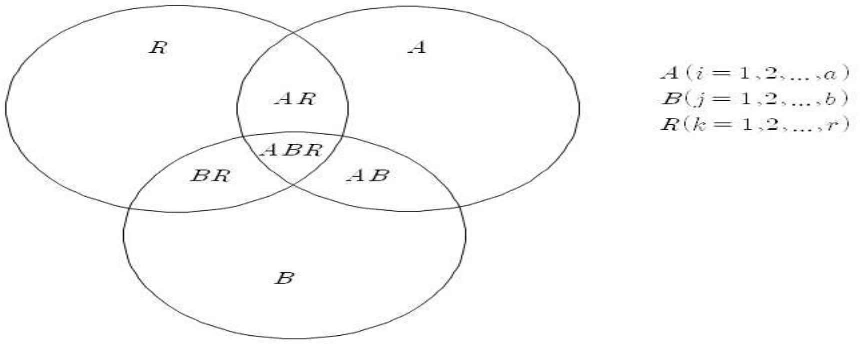
* 경원대학교 산업공학과

따라서 본 연구에서는 랜덤 교차 지분인자의 $R\times A\times C$, $(S:A)\times B$, $R\times A\times B\times C$의 EMS를 기초로 SPD(RCBD, RCBD), SPD(CRD, RCBD), SSPD, SBD의 생성방안을 제안한다. 또한 분할구에서 고려된 오차항을 제어하기 위한 설계의 특징과 분산분석의 방법을 비교 고찰한다.

2. 랜덤모형

2.1 랜덤모형 $R\times A\times B$

$R\times A\times B$의 데이터 구조식 모형은 <그림1>과 같으며 $x(ijk)=\mu+A(i)+B(j)+R(k)+AB(ij)+AR(ik)+BR(jk)+ABR(ijk)$이다.



<그림 1> $R\times A\times B$의 데이터 구조식 모형

<그림 1>에서 $ANOVA$ F검정을 위한 EMS는 <표1>과 같다.

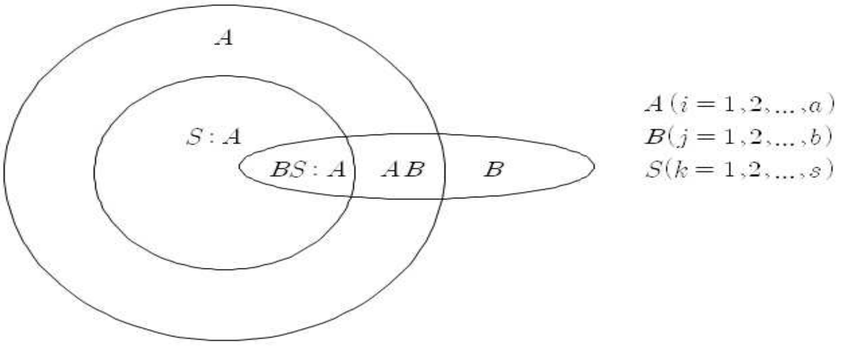
<표 1> $R\times A\times B$의 EMS

Source	EMS
A	$br\sigma^2(A)+r\sigma^2(AB)+b\sigma^2(AR)+\sigma^2(ABR)$
B	$ar\sigma^2(B)+r\sigma^2(AB)+a\sigma^2(BR)+\sigma^2(ABR)$
R	$ab\sigma^2(R)+b\sigma^2(AR)+a\sigma^2(BR)+\sigma^2(ABR)$
AB	$r\sigma^2(AB)+\sigma^2(ABR)$
AR	$b\sigma^2(AR)+\sigma^2(ABR)$
BR	$a\sigma^2(BR)+\sigma^2(ABR)$
ABR	$\sigma^2(ABR)$

<표1>에서 A, B, R은 근사 F검정과 근사 Satterthwaite 자유도를 구해야 하며 AR, BR은 각각의 MS(Mean Square)를 MS(ABR)로 나눈다.
$F(A) = MS(A)/(MS(AB) + MS(AR) - MS(ABR))$,
분모의 자유도는 $DF^* = (MS(AB) + MS(AR) - MS(ABR))^2/$
$(MS^2(AB)/DF(AB) + MS^2(AR)/DF(AR) + MS^2(ABR)/DF(ABR))$이다.

2.2 랜덤모형 $(S:A) \times B$

$(S:A) \times B$는 S인자가 A인자에서 지분되었고 B와는 교차된다는 모형으로 데이터 구조식 모형은 <그림2>와 같으며 $x(ijk) = \mu + A(i) + S:A(k:i) + B(j) + AB(ij) + BS:A(jk:i)$이다.



<그림 2> $(S:A) \times B$의 데이터 구조식 모형

<그림 2>에 대한 EMS는 <표 2>와 같다.

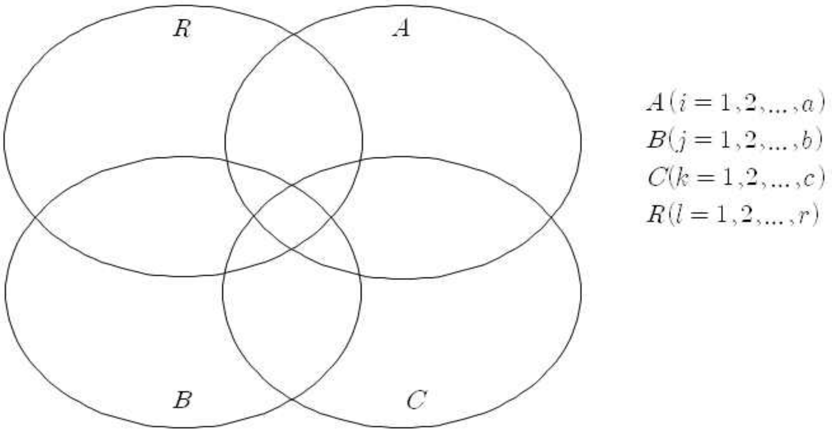
<표 2> $(S:A) \times B$의 EMS

Source	*EMS*
A	$br\sigma^2(A) + b\sigma^2(S:A) + s\sigma^2(AB) + \sigma^2(BS:A)$
$S:A$	$b\sigma^2(S:A) + \sigma^2(BS:A)$
B	$as\sigma^2(B) + s\sigma^2(AB) + \sigma^2(BS:A)$
AB	$s\sigma^2(AB) + \sigma^2(BS:A)$
$BS:A$	$\sigma^2(BS:A)$

<표2>에서 $F(A) = MS(A)/(MS(S:A) + MS(AB) - MS(BS:A))$의 근사검정과 2.1절과 같이 근사 Satterthwaite 자유도 DF^*를 구한다. $F(B) = MS(B)/MS(AB)$, $F(S:A) = MS(S:A)/MS(BS:A)$, $F(AB) = MS(AB)/MS(BS:A)$이다.

2.3 랜덤모형 $R\times A\times B\times C$

$R\times A\times B\times C$의 데이터 구조식 모형은 <그림3>과 같으며 $x(ijkl)=\mu+A(i)+R(l)+AR(il)+B(j)+AB(ij)+BR(jl)+ABR(ijl)+C(k)+AC(ik)+BC(jk)+ABC(ijk)+CR(kl)+ACR(ikl)+BCR(jkl)+ABCR(ijkl)$이다.



<그림 3> $R\times A\times B\times C$의 데이터 구조식 모형

<그림 3>에서 $ANOVA$ F검정을 위한 EMS는 <표 3>과 같으나 주요 인자만 고려하여 σ^2은 Source로 표시하고 개수는 생략한다.

<표 3> $R\times A\times B\times C$의 EMS

Source	EMS
A	$A+AR+AB+ABR+AC+ABC+ACR+ABCR$
R	$R+AR+BR+ABR+CR+ACR+BCR+ABCR$
B	$B+AB+BR+ABR+BC+ABC+BCR+ABCR$
AB	$AB+ABR+ABC+ABCR$
C	$C+AC+BC+ABC+CR+ACR+BCR+ABCR$
AC	$AC+ABC+ACR+ABCR$
BC	$BC+ABC+BCR$
ABC	$ABC+ABCR$

3. 오차제어 설계에 의한 고정모형 SPD생성

3.1 A, B 고정모형 SPP(RCBD, RCBD) 생성

SPD(RCBD, RCBD)는 Whole Plot(WP)에 R, $A:R$를, Sub Plot(SP)에 B를 분할하는 방법으로 2.1절의 $R\times A\times B$의 데이터 구조식 모형에서 $e_1 = AR(ik)$, $e_2 = ABR(ijk)$로 된다. 따라서 SPD(RCBD, RCBD)의 데이터 구조식은 $x(ijk) = \mu + A(i) + R(k) + e_1 + B(j) + AB(ij) + BR(jk) + e_2$가 되며 EMS는 <표4>와 같다.

<표 4> SPD(RCBD, RCBD)의 EMS

Source	*EMS*
$WP:A$	$br\sigma^2(A) + b\sigma^2(AR) + \sigma^2(ABR)$
R	$ab\sigma^2(R) + b\sigma^2(AR) + a\sigma^2(BR) + \sigma^2(ABR)$
$e_1 = AR$	$b\sigma^2(AR) + \sigma^2(ABR)$
$SP:B$	$ar\sigma^2(B) + a\sigma^2(BR) + \sigma^2(ABR)$
AB	$r\sigma^2(AB) + \sigma^2(ABR)$
BR	$a\sigma^2(BR) + \sigma^2(ABR)$
$e_2 = ABR$	$\sigma^2(ABR)$

<표 4>의 WP에서 $F(A) = MS(A)/MS(e_1)$, R은 F검정이 불가능하며 SP에서 $F(B) = MS(B)/MS(BR)$, $F(AB) = MS(AB)/MS(e_2)$, BR은 SPD에서 의미가 없으므로 검정을 생략한다.

만약 BR과 ABR이 아주 작다면 Pooling해서 새로운 오차항 $e_2 = BR + ABR$을 만들면 $EMS(B) = ar\sigma^2(B) + a\sigma^2(BR) + \sigma^2(ABR) = ar\sigma^2(B) + \sigma^2(ABR)$, $EMS(e_2) = BR + ABR = a\sigma^2(BR) + \sigma^2(ABR) + \sigma^2(ABR) = \sigma^2(ABR)$가 된다. 이 경우 B, AB의 F검정은 e_2의 MS로 나누어 주면 되며 $SS(e_1) = SS(AR) = \sum_i\sum_j\sum_k(\overline{y_{i\cdot k}} - \overline{y_{i\cdot\cdot}} - \overline{y_{\cdot\cdot k}} + \overline{\overline{y}})^2$, $SS(e_2) = SS(AB:R) = \sum_i\sum_j\sum_k(y_{ijk} - \overline{y_{i\cdot k}} - \overline{y_{\cdot jk}} + \overline{y_{i\cdot\cdot}})^2$이다.

3.2 A, B 고정모형 SPP(CRD, RCBD) 생성

SPD(CRD, RCBD)는 WP에 A, $S:A$를, SP에 B를 분할 배치하는 방법으로 2.2절의 랜덤모형 $(S:A)\times$B의 데이터 구조식에서 $e_1=S:A(k:i), e_2=BS:A(jk:i)$이다. 따라서 SPD(CRD, RCBD)의 데이터 구조식은 $x(ijk)=\mu+A(i)+e+AB(ij)+e_2$이고 EMS는 <표 5>와 같다.

<표 5> SPD(CRD, RCBD)의 EMS

Source	EMS
$WP:A$	$bs\sigma^2(A)+b\sigma^2(S:A)+\sigma^2(BS:A)$
$e_1=S:A$	$b\sigma^2(S:A)+\sigma^2(BS:A)$
$SP:B$	$as\sigma^2(B)+\sigma^2(BS:A)$
AB	$s\sigma^2(AB)+\sigma^2(BS:A)$
$e_2=BS:A$	$\sigma^2(BS:A)$

<표 5>에서 $ANOVA$ F검정은 각 Plot의 Error로 나누어 주면 되고 $F(e_1)=MS(e_1)/MS(e_2)$로 계산된다.

3.3 A, B, C 고정모형 SSPD 생성

SSPD(Split Split Plot Design)는 WP에 R, A를, SP에 B를, SSP(Sub Sub Plot)에 C를 분할 배치하는 계획으로 2.3절의 $R\times A\times B\times C$의 데이터 구조식 모형에서 $e_1=AR(il), e_2=BR(jl)+ABR(ijl), e_3=CR(kl)+ACR(ikl)+BCR(jkl)+ABCR(ijkl)$이다. SSPD의 데이터 구조식 $x(ijkl)=\mu+A(i)+R(l)+e_1+B(j)+AB(ij)+e_2+C(k)+AC(ik)+BC(jk)+ABC(ijk)+e_3$가 되며 <표3>에서 A,B,C는 고정인자, R은 변량인자를 고려하여 EMS를 구한 후 $ANOVA$ F검정을 실시한다. EMS유도는 3.1, 3.2절과 같으며 각 Plot내의 오차항으로 F검정을 구하며 $F(e_1)=MS(e_1)/MS(e_2)$, $F(e_2)=MS(e_2)/MS(e_3)$로 구한다.

3.4 A, B 고정모형 SBD 생성

SBD(Split Block Design)은 WP에 R, A를, SP에 B를, SSP에 AB를 분할 배치하는 방법으로 2.1절의 $R\times A\times B$의 데이터 구조식 모형에서 $e_1=AR(ik)$, $e_2=BR(jk)$, $e_3=ABR(ijk)$이다.

따라서 SBD의 데이터 구조식 $x(ijk) = \mu + A(i) + R(k) + e_1 + B(j) + e_2 + AB(ij) + e_3$이며 EMS는 <표 4>의 SPD(RCBD, RCBD)에서 $e_1 = AR$, $e_2 = BR$, $e_3 = ABR$로 치환하면 된다.

4. 결 론

본 연구에서는 랜덤 교차 지분인자에 의한 데이터 구조식 모형과 EMS를 기초로 4가지 분할구 설계 실험의 생성방법과 분석방안을 제시하였다. 랜덤모형 $R \times A \times B$에서 유도된 SPD(RCBD, RCBD)모형은 EMS를 통해 정확한 F검정과 Pooling된 오차의 F검정 두가지를 제시하였다. 또한 $(S:A) \times B$, $R \times A \times B \times C$, $R \times A \times C$에서 생성된 SPD(CRD, RCBD), SSPD, SBD의 분할구 오차 제어 설계 방법의 특징에 관해 고찰하였다.

5. 참 고 문 헌

[1] 김성숙, 김양분, 일반화가능도 이론, 교육과학사, 2001.

[2] 성내경, 실험설계와 분석, 자유아카데미, 1998.

[3] Brennan R.L., Generalizability Theory, Springer, 2010.

[4] Cardinet J., Johnson S., Pini G., Applying Generalizability Theory Using EduG, Routledge Academic, 2009.

[5] Federer W.T., King F., Variations on Split Plot and Split Block Experiments Designs, Wiley, 2007.

[6] Goos P., The Opimal Design of Blocked and Split-Plot Experiments, Springer, 2002.