

동적지연을 포함하는 편향 비례항법 유도루프의 해석 해를 이용한 정밀 충돌각 제어

문한빛*, 나원상*, 황익호**, 김용정***

한동대학교 기계제어공학과*, 국방과학연구소 유도조종기법팀**, 한국과학기술원 수리과학과***

Precise Impact Angle Control Using Analytic Solution of Biased Proportional Navigation with Single Dynamic Lag

Han-Bit Moon*, Won-Sang Ra*, Ick-Ho Whang**, Yong-Jung Kim***
 Handong Global University*, Agency for Defense Development** KAIST***

Abstract - This paper deals with the problem of precise impact angle control of an actual homing missile guided by biased proportional navigation (BPN). To do this, the BPN guidance loop including dynamic lag is modeled as the confluent hyper-geometric differential equation and its analytic solution is derived. Based on the solution, a systematic way to determine the bias constant is newly devised. Different from the existing BPN solution obtained by ignoring the dynamic lag, the proposed one can exactly describe the behavior missile before target interception. hence it is drastically improved the angle constrained terminal guidance performance.

1. 서 론

편향 비례항법은 대지 혹은 대전차 유도탄의 충돌각 제어를 위해 일반적으로 사용되는 유도기법이다. 많은 경우 호밍유도 구간에서 접근 속도를 상수로 가정해도 무방하므로, 충돌각 제어를 위해 도입된 편향 상수는 편향 비례항법 궤적의 닫힌 해를 이용하여 결정할 수 있다 [1,2]. 따라서, 실제 호밍유도루프의 특성이 충분히 고려된 편향 비례항법 궤적 산출은 정밀 충돌각 제어기법 설계를 위한 필수 선결 과제 중 하나라 할 수 있다.

편향 비례항법 유도법칙을 채택한 호밍유도루프는 시변 비선형 미분방정식으로 기술된다. 만일 초기 헤딩 오차각이 크지 않고, 동적 지연요소가 존재하지 않는다면, 비선형 상대운동 방정식을 선형화함으로써 비례항법 유도궤적의 해석 해를 얻을 수 있는 것으로 알려져 있다 [3]. 비례항법 계수가 $N \geq 3$ 인 경우, 동적지연 요소를 무시한 채 산출된 편향 비례항법 유도오차 및 유도명령은 시간이 지남에 따라 0으로 수렴한다. 불행하게도 실제 유도루프에는 조종루프, 구동장치, 탐색기, 항법센서 등 다양한 형태의 동적 지연요소가 포함되어 있으므로, 전술한 방법은 실제 상황과는 상이한 해석결과를 제공한다. 동적 지연요소는 표적 조우 직전 유도명령의 급격한 발산을 초래하며, 결과적으로 가속도 제한이 있는 유도탄의 유도오차를 유발하는 주요 원인이 된다 [3]. 하지만, 동적지연 요소를 고려한 편향 비례항법 유도루프의 해석 해 산출 문제는 아직까지도 미해결 난제로 남아있다.

전술한 문제를 해결하기 위해, 본 논문에서는 동적지연 요소를 1차 시스템으로 근사하고, 편향 비례항법 유도법칙을 채택한 유도탄과 표적 간의 상대운동을 합류 초기 미분방정식 형태로 모델링한다. 이 경우, 편향 비례항법의 해석 해는 Kummer 기저함수의 선형 합으로 표현된다 [4]. 또한, 비례항법 상수가 $N=3$ 인 경우에 대해, 유도탄 편향 비례항법의 해를 지수적분함수 형태로 간략히 할 수 있음을 증명한다. 정밀 충돌각 제어를 위해, 편향상수의 값을 체계적으로 선정하는 방안이 고안된다. 편향 비례항법 호밍유도루프의 해석 해를 재구성함으로써 충돌각 제어를 위한 편향상수의 값이 초기조건, 조우시간 및 요구 충돌각의 함수로 결정됨을 보인다. 제안된 편향 비례항법의 해석 해는 조우 직전 편향 비례항법 유도루프의 거동 특성을 정확히 모사하므로, 결과적으로 충돌각 제어기법의 성능 향상을 도모할 수 있다. 모의실험을 통해 제안된 방법이 기존 방법에 비해 우수한 충돌각 제어 성능을 보임을 입증한다.

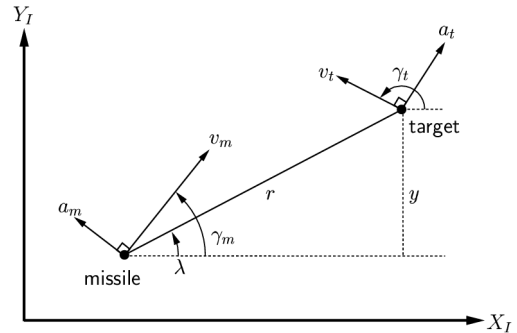
2. 동적 지연 요소를 포함한 편향 비례항법 유도 궤적의 해석해

2.1 편향 비례항법 유도 루프의 모델링

일반적인 호밍 유도기하는 그림 1과 같다. 그림 1로부터 상대 운동방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{y} = a_t \cos(\pi - \gamma_t) - a_m \cos(\gamma_m) \quad (1)$$

그림 1에서 X_I 는 초기 시선벡터 방향으로 설정된다. y 는 초기 시선벡터에 수직인 방향으로의 상대 위치를 의미한다. a_m , a_t 와 γ_m , γ_t 는 각각 유도탄과 표적의 가속도 및 비행 경로 각을 의미한다. Head-on 조우 시 나리오에 대해 $\pi - \gamma_t \ll 1$, $\gamma_m \ll 1$ 이 성립하므로, 식 (1)로부터 근사식 (2)를 유도할 수 있다. 편의상 표적은 기동하지 않는 것으로 가정한다.



<그림 1> 호밍 유도 기하

$$\ddot{y} \approx a_t - a_m \approx -a_m \quad (2)$$

호밍유도구간에서 시선각 λ 는 충분히 작은 값으로 유지되며 접근속도 v_c 는 상수로 가정해도 무방하므로, 근사식 (3)이 성립됨을 알 수 있다.

$$v_c = \dot{r}, t_{go} = t_f - t \approx \frac{r}{v_c}, \lambda = \tan^{-1} \frac{y}{r} \approx \frac{y}{r} \quad (3)$$

위의 식에서 r 은 상대거리, t_f 는 표적조우시간을 나타낸다.

호밍 유도루프에 포함되어있는 동적 지연요소를 시정수가 τ 인 1차 시스템으로 모델링할 수 있다면, 유도탄 가속도 a_m 과 편향비례 가속도 명령 a_c 간에는 다음과 같은 관계가 만족된다.

$$\frac{a_m(s)}{a_c(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \rightarrow \dot{a}_m = -\frac{1}{\tau} a_m + \frac{1}{\tau} a_c \quad (4)$$

여기서 편향 비례항법 유도명령 a_c 는 식 (5)와 같다.

$$a_c = N v_c (\dot{\lambda}(t) + b) \quad (5)$$

비례항법 상수 N 은 통상적으로 3 이상의 값을 가지며, b 는 표적 조우 시점에서의 충돌각 제어를 위해 도입된 편향 상수를 의미한다.

식 (2)와 (5)를 식 (4)에 대입한 후 양변을 적분하면 다음과 같이 편향 비례항법 유도루프를 시변 계수를 갖는 미분방정식으로 기술할 수 있다.

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{\tau} \dot{y}(t) + \frac{N}{\tau} \frac{1}{t_{go}} y(t) = \frac{N v_c b}{\tau} t_{go} + c_0 \quad (6)$$

여기서 적분상수 $c_0 \equiv c'_0 - \frac{N v_c}{\tau} t_f$, $c'_0 \equiv -a_{m(0)} + \frac{1}{\tau} \dot{y}(0) + \frac{N v_c}{\tau} \lambda(0)$ 로 정의 된다.

2.2 편향 비례항법 유도 시스템의 해석해 산출

변수 변환관계 $x \equiv t_{go}/\tau$, $w \equiv y/x$ 를 이용하여 식 미분방정식 (6)을 다시 쓰면,

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + (2-x) \frac{dw}{dx} - (1-N)w = \tau^2 c_0 + \tau^2 N v_c b x. \quad (7)$$

식 (7)로부터 편향 비례항법 유도루프가 합류 초기 미분방정식으로 기술됨을 알 수 있다. N 이 양의 정수이고 $x > 0$ 인 경우, 합류 초기 미분방정식 (7)의 해석 해는 식 (8)과 같다.

$$w(x) = c'_1 \Phi(1-N; 2; x) + c'_2 \frac{1}{x} e^x \Psi(N+1; 2; -x) + \frac{\tau^2}{N-1} c_0 + \frac{N}{N-2} v_c b \tau^2 \left(x - \frac{2}{N-1} \right) \quad (8)$$

여기서 c'_1 과 c'_2 는 적분 상수이다. Kummer 기저함수 $\Phi(\cdot)$ 와 $\Psi(\cdot)$ 는 감마함수 $\Gamma(\cdot)$ 를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi(\alpha, \gamma; x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots,$$

$$\Psi(\alpha, \gamma; x) \equiv \frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{z^k}{k!} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4\alpha-\gamma)_k}{\Gamma(2-\gamma+k)} \frac{z^{k+1-\gamma}}{k!} \right)$$

비례항법 상수 $N=3$ 인 경우, 해석 해 (8)은 다음과 같이 간략화된다.

$$w(x) = \frac{\tau^2}{2} c_0 + 3v_c b \tau^2 (x-1) + c_1 (x^2 - 6x + 6) + c_2 \left[\frac{1}{x} e^x (x^2 - 5x + 2) - (x^2 - 6x + 6) Ei(x) \right] \quad (9)$$

위의 식에서 지수적분함수 $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ 이다.

이제, 식 (9)를 이용하여 편향 비례항법 궤적을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$y(x) = c_1(x)(x^3 - 6x^2 + 6x) + c_2(x)(x^3 - 5x^2 + 2x) + \frac{c_0 \tau^2}{2} x + 3v_c b \tau^2 (x-1)x, \quad (10)$$

$$v(x) = -\frac{3}{\tau} [c_1(x)(x^2 - 4x + 2) + c_2(x)(x^2 - 3x)] - \frac{c_0 \tau}{2} - 3v_c b \tau (2x - 1),$$

$$a_m(x) = -\frac{6}{\tau^2} [c_1(x)(x-2) + c_2(x)(x-1)] + 6v_c b$$

여기서 $c_1(x) \equiv c_1 - c_2 Ei(x)$, $c_2(x) \equiv c_2 \frac{e^x}{x}$.

3. 편향 비례항법의 해석 해를 이용한 총돌각 제어

총돌각 제어의 목적은 유도탄의 비행 경로각 $\gamma = \tan^{-1}(v/v_c)$ 를 표적 조우 직전 시점 $x_f = \epsilon \ll 1$ 에서 요구 총돌각 γ_f 가 되도록 형성하는 것이다. 접근속도 v_c 를 상수이고 식 (10)에서 수직방향 속도 $v(x)$ 는 편향 상수 b 의 함수이므로, 총돌각 제어 문제는 편향상수 b 의 선정 문제로 귀결된다.

편향 비례항법의 해석 해 (10)을 편향 상수항과 초기조건에 의해 결정되는 적분 상수항으로 구분하여 정리할 수 있다.

$$Y(x) = h^b(x)b + H^c(x)c \quad (11)$$

여기서

$$Y(x) \equiv \begin{bmatrix} y(x) - \frac{1}{2}\tau^2 c_0' x \\ -\tau v(x) - \frac{1}{2}\tau^2 c_0' \end{bmatrix}, c \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, h^b(x) \equiv Nv_c \tau \begin{bmatrix} \tau x(x-1) - \frac{1}{2}t_f x \\ \tau(2x-1) - \frac{1}{2}t_f \end{bmatrix},$$

$$H^c(x) \equiv \begin{bmatrix} x(x^2 - 6x + 6) & e^x(x^2 - 5x + 2) - Ei(x)x(x^2 - 6x + 6) \\ 3(x^2 - 4x + 2) & 3(e^x(x-3) - Ei(x)(x^2 - 4x + 2)) \end{bmatrix}$$

식 (11)로부터 적분상수 c 가 호밍유도 시작시점($x_0 = (t_f - 0)/\tau$)에서의 초기조건을 이용하여 결정됨을 알 수 있다.

$$c = (H^c(x_0))^{-1} (Y(x_0) - h^b(x_0)b) \quad (12)$$

조우시점 x_f 에서 비행경로각이 요구 총돌각 γ_f 와 같아지도록 유도탄 궤적을 형성하기 위해서는 수직방향 상대속도가 $v_f = v(x_f) = v_c \tan(\gamma_f)$ 를 만족하도록 편향상수 b 를 조정하여야 한다. 식 (12)를 식 (11)에 대입한 후 조우시점 x_f 에 대한 식으로 정리하면, 편향상수 b 를 초기조건 $y(x_0), v(x_0), a_m(x_0)$, 조우시간 x_f 및 요구 총돌각 γ_f 의 함수로 정리할 수 있다.

$$b = -\frac{\tau}{g_2(x_f)} \cdot \left[v_f - \frac{1}{2}(\tau a_m(x_0) - \dot{y}(x_0) - Nv_c \lambda(x_0)) + \frac{1}{\tau} z_2(x_f) \right] \quad (13)$$

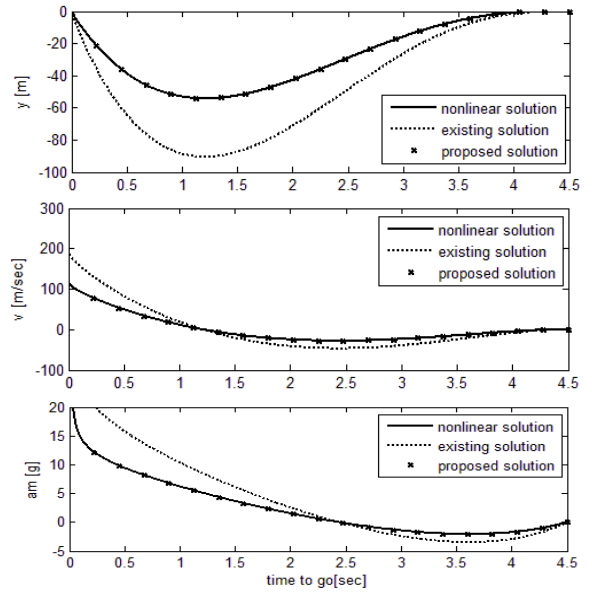
여기서

$$\begin{bmatrix} z_1(x_f) \\ z_2(x_f) \end{bmatrix} = H^c(x_f)(H^c(x_0))^{-1} Y(x_0),$$

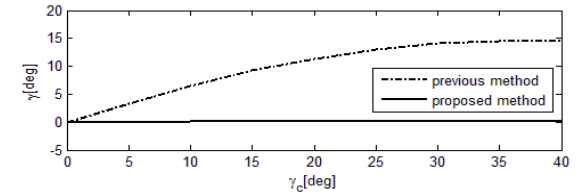
$$\begin{bmatrix} g_1(x_f) \\ g_2(x_f) \end{bmatrix} = h^b(x_f) - H^c(x_f)(H^c(x_0))^{-1} h^b(x_0)$$

4. 시뮬레이션 결과

제안된 편향 비례항법의 해석 해와 총돌각 제어 방법의 타당성을 검증하기 위하여 모의실험을 수행하였다. 모의실험의 조건은 표 1에 정리한 바와 같다. 그림 1에서 확인할 수 있듯이, 동적지연 요소를 무시하고 산출된 기존의 해석 해와 달리, 제안된 해석 해는 표적 조우시점을 포함한 전체 호밍유도구간에서 실제 편향 비례항법 유도루프의 특성을 정확히 모사하고 있음을 알 수 있다. 기존 총돌각 제어기법과 본 논문에서



〈그림 2〉 BPNG 위치/속도/기속도



〈그림 3〉 Impact angle control results

〈표 1〉 모의 실험 조건

비례항법 상수	$N=3$
동적지연 요소	$\tau = 0.6$ [sec]
초기 유도탄 및 표적위치	$\vec{r}_m = [0, 0]$ [km], $\vec{r}_t = [3.06, 0]$ [km]
유도탄 및 표적속력	$v_t = 0$ [m/s], $v_m = 680$ [m/s] $\approx v_c$
초기 비행경로각	$\gamma = 0^\circ$
요구 총돌각	$\gamma_f = 0^\circ \sim 40^\circ$

새롭게 제안된 총돌각 제어기법의 성능을 그림 3에 도시하였다. 기존의 표적 총돌각 제어기법은 요구 총돌각이 증가함에 따라 제어오차가 급격히 증가하는 경향을 보인다. 이는 기존의 총돌각 제어기법이 호밍유도루프에 존재하는 동적 지연요소를 무시한 채 설계되었기 때문이다. 이에 반해 제안된 총돌각 제어기법은 동적지연요소를 포함한 유도루프의 해석 해에 근거하므로, 요구 총돌각의 크기에 관계없이 우수한 총돌각 제어 성능을 제공한다.

5. 결 론

본 논문에서는 편향 비례항법 유도루프 상에 존재하는 동적지연 요소를 고려한 정밀 총돌각 제어기법을 제안하였다. 이를 위해, 동적 지연 요소가 포함된 편향 비례항법 유도루프가 합류 초기하 미분방정식으로 모델링 됨을 보이고, 그 해를 Kummer 기저함수의 선형 합으로 산출하였다. 유도된 편향 비례항법의 해석 해에 기반하여, 표적 조우직전 총돌각을 정밀 제어할 수 있는 편향상수의 체계적 산출 방법이 고안되었다. 모의실험을 통해 제안된 방법이 기존의 방법에 비해 동적 지연요소가 존재하는 실제 상황에서 우수한 총돌각 제어 성능을 보임을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

[1] Kim, B.S., Lee, J.G., and Han, H.S.: "Biased PNG for impact with angular constraint", *IEEE Trans. Aerospace and Electronics Sys.*, pp. 277-288, 1998.

[2] Jeong, S.K., Cho, S.J., and Kim, E.G.: "Angle constraint biased PNG", *Proc. Asian Control Conf.*, pp. 1849-1854, 2004.

[3] Zarchan, P.: *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 4th ed., AIAA, 2002.

[4] Slater, L.J.: *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 2008.