

회전형 도립진자를 이용한 PID 제어기와 상태궤환 제어기의 선형제어 실험

장현석*, 이권순

The Experiment on PID Controller and State Feedback Controller using Rotational Inverted Pendulum

HyeonSeok Jang*, Kwon Soon Lee
Dong-a University*, Dong-a University

Abstract - 본 논문은 불안정한 비선형시스템의 대표적인 플랜트인 도립진자를 이용하여, 비선형시스템의 선형화된 모델링에서 PID제어기와 상태궤환제어기의 제어역할을 연구한다. 우선 선형화시스템에서의 제어기를 구성한 후 회전형 도립진자를 모델링한다. 회전형 도립진자의 모델링은 실린더의 관성모멘트와 진자의 회전중심에 대한 모멘트의 관계를 토대로 비선형 동적방정식 형태로 정리한다. 정리된 방정식을 선형화하여 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 PID제어기와 상태궤환제어기의 제어특징과 성능을 비교 및 연구한다. 테스트용 회전형 도립진자를 이용하여 위에서 구성된 제어기로 제어가능한지 실험한다. 테스트용 회전형 도립진자는 RealSYS사의 리얼시스 DSP Inverted Pendulum 2005년 생산품으로 실험한다.

1. 서 론

고전제어에서 현대제어로 발전되면서 불안정한 비선형적인 시스템을 다루어야 하는 경우가 많다. 해석이 용이하고, 물리적인 현상을 시각적으로 이해하기 쉬운 비선형시스템을 연구 해볼으로써 제어공학의 이해와 발전에 접근할 수 있다. 대표적인 불안정한 비선형시스템으로 도립진자 시스템이 있다.

도립진자시스템이란 주위에서 쉽게 접할 수 있는 불안정한시스템의 예이다. 따라서 도립진자 시스템의 물리적인 현상을 이해하고 그 물리적인 현상을 수학적으로 표현해 봄으로써 불안정한 시스템 역시 제어가 가능하다는 것을 확인할 수 있다.

그래서 이 회전형 도립진자시스템을 연구하기 위한 기초적인 단계로 PID제어기와 상태궤환제어기의 선형제어를 연구한다.

본 논문은 비선형적인 회전형 도립진자시스템을 선형화하여 PID제어기와 상태궤환제어기를 이용한 선형제어의 성능들을 비교하여 비선형시스템의 기본적인 선형화 제어를 연구한다. 이에 비선형시스템의 선형화와 더불어 선형제어기의 구조와 원리를 이해하며, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제어특성을 연구하고 실제 회전형 도립진자에 적용하여 본다.

2. 본 론

2.1 선형화시스템에 적용되는 제어기

회전형 도립진자는 비선형적인 시스템이다. 이에 따라 비선형적인 모델링을 선형화하여 제어기를 적용한다. 선형화 된 시스템에 사용될 수 있는 제어기로는 비례, 미분, 적분값으로 제어 목표값에 도달하는 형태를 조절하는 PID제어기와 입출력값을 피드백하여 목표값에 수렴시키는 방식의 입출력 궤환기법 등이 있다.

이 두가지는 선형제어의 기본적인 제어기 형태로 각각의 장단점이 있다. 보통 PID제어기는 하나 혹은 두가지 이상을 조합하여 설계하며 우수한 제어성능에 비해 구조가 간단하며 제어이득 조정이 다른 제어기들에 비해 비교적 쉽다는 장점이 있다. 반면 궤환기법은 상태관측기까지 설계하여 외부잡음 등이 개입되지 않고 속도 및 위치를 추정가능하다.

2.1.1 PID제어기와 상태궤환제어기 설계
PID제어기

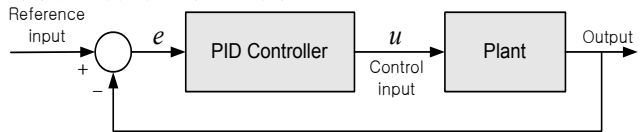
PID제어기는 K_p, K_i, K_d 로 구성된다. K_p 는 비례제어으로써 외란으로부터 오차를 줄이면서 응답시간에 긍정적인 영향을 주나 정상상태 오차를 만든다. 또한 증가시에 순간응답을 나쁘게 만들어 과도응답의 오버슈트를 커지게 한다. K_d 는 미분제어으로써 시스템의 안정성을 높이는 역할을 하며, 오버슈트를 감소시키고 순간응답을 좋게 만든다. K_i 는 시스템의 정상상태 오차를 작게 만든다.

PID제어기설계의 중심은 시스템의 S-영역 평면상에서 극점이 음수쪽으로 가도록 안정화시키는 것이다.

PID제어기의 전달함수는 다음식과 같다.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

제어기는 다음과 같이 구성되며



<그림 1> PID 제어기의 블록도

Fig 1 Block diagram of the PID controller

여기서 미분, 적분 시상수 $T_i = K_p/K_i, T_d = K_d/K_p$ 로 등가된 형태로 변환하여 정리하면 제어입력 u 는 다음식과 같다.

$$u(t) = K_p [e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t)]$$

상태궤환제어기

상태궤환이란 제어시에 출력이 다시 입력으로 돌아와 출력값에 영향을 주는 피드백시스템이다.

정궤환은 출력측 피드백 값들과 원래의 입력을 더하고, 부궤환은 원래의 입력에 출력을 뺀 것으로 정궤환은 출력값이 계속 증가하게 되므로, 결국 발산하게 되며, 부궤환은 출력값이 결국 특정값을 수렴하게 된다.

가제어성을 위해서는 다음조건을 만족하여야 한다.

$$rank(\mathbf{U}) = n \text{ or } \det(\mathbf{U}) \neq 0$$

이러한 조건으로 제어가 가능하다면 상태궤환 제어기로 임의로 극점을 지정할 수 있다.

제어가능한 아래의 시스템에서

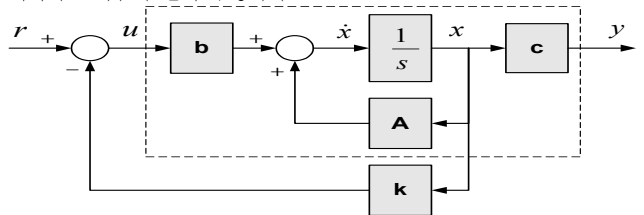
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx}$$

전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

제어기는 다음과 같이 구성되며



<그림 2> 상태궤환 제어기

Fig 2 State feedback controller

제어입력은 다음식과 같으며,

$$u(t) = r(t) - \mathbf{kx}(t)$$

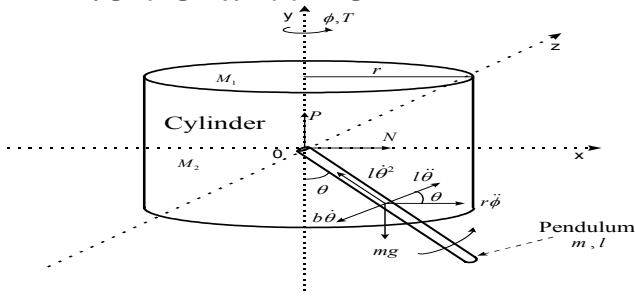
여기서 \mathbf{k} 는 궤환이득이다. $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$

2.2 수평 회전형 도립진자 시스템

보편적인 도립진자 시스템(카트형 도립진자 시스템)에서와 달리 수평 회전형 도립진자에서는 모터 토크를 제어하여 회전형의 원동과 그곳에 부착된 자유 회전운동을 하는 진자까지 제어하는 시스템이다.

엔코더(회전운동용 검출센서:Rotary Encoder)를 통해 진자의 회전위치와 속도가 실시간으로 검출되며, 진자의 운동은 모터 토크를 제어함으로써 목표 운동상태로 제어되어 진다. (목표 운동상태란 진자가 수직으로 세워졌을 때의 운동상태, 이 각도를 "0"이라 기준한다.)

2.2.1 수평 회전형 도립진자의 모델링



〈그림 3〉 회전형 도립진자 시스템

Fig 3 the rotational inverted pendulum system

실린더에 대한 관성 모멘트 J 는

$$J = \frac{1}{2} M_1 r^2 + M_2 \left(r^2 + \frac{1}{4} t^2 \right)$$

수평력과 수직력에 대하여 정리하면

$$N = m(l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\phi} - l\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$P = m(l\dot{\theta}\sin\theta + l\theta^2\cos\theta + g - b\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$I = 4/3ml^2$$

진자의 회전중심에 대한 모멘트는 다음식이 되어

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta}$$

대입하여 정리하면, 위 모델링의 시스템 방정식은 다음식과 같다.

$$-mlr\cos\theta\ddot{\phi} = (I - ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta + mlb(\sin^2\theta + l\cos^2\theta)\dot{\theta}$$

$$T = (J + mr^2)\ddot{\phi} - mrlb\cos\theta\dot{\theta} + mlr\cos\theta\ddot{\theta} - mlr\sin\theta\dot{\theta}^2$$

비선형 동적방정식의 형태를 갖는다.

〈표 1〉 시스템의 파라미터

Table 1 Parameters of the system

파라미터	요 소	실제값
ϕ	Cylinder의 회전 각	
θ	Pendulum의 회전 각	
r	Cylinder의 반지름	0.06 m
m	Pendulum의 질량	0.022 kg
M_1	Cylinder 윗 부분의 질량	0.068 kg
M_2	Cylinder 몸체 부분의 질량	0.620 kg
M	Cylinder 전체의 질량($M_1 + M_2$)	0.688 kg
t	Cylinder 몸체 및 윗 부분의 두께의 1/2	0.005 m
g	중력 가속도	9.806 m/s ²
l	Pendulum의 길이	0.167 m
b	진자와 실린더 사이의 마찰 계수	0.300
P	Cylinder와 Pendulum 사이에 작용하는 수직력	
N	Cylinder와 Pendulum 사이에 작용하는 수평력	
T	Motor로부터 Cylinder로 인가되는 Torque	

2.2.2 선형화

PID제어기와 상태궤환제어기를 사용하기 위해서는 이 비선형적인 시스템을 동작점 근처에 대해 선형화하여야 한다. 진자의 위치가 수직 윗방향일때가 $\theta=0$ 이므로 이를 기준으로 선형화하면, θ 가 아주 작을 때에는 $\cos\theta \cong 1, \sin\theta \cong \theta, \theta^2 \cong 0$ 이 성립하므로 다음과 같이 선형화할 수 있다.

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\theta + mlb\dot{\theta} = -mlr\ddot{\phi}$$

$$(J + mr^2)\ddot{\phi} - mrlb\dot{\theta} + mlr\theta = T$$

이에 따라 상태공간 방정식은 실린더의 위치와 각속도, 진자의 위치와 각속도($\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}$)으로 구성된다.

$$\mathbf{x} = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta}]^T \text{이며, 정리하면 다음식과 같다.}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

u 는 모터로부터 시스템에 인가되는 토크입력이며, 각 행렬들은 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

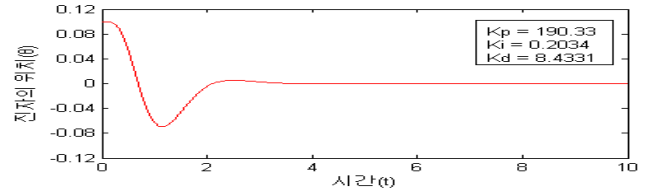
$$a_1 = \frac{m^2 l^2 g r}{I(J + mr^2) - ml^2(J + 2mr^2)}, \quad a_2 = \frac{-Imr lb}{I(J + mr^2) - ml^2(J + 2mr^2)}$$

$$a_3 = \frac{(J + mr^2)mgl}{I(J + mr^2) - ml^2(J + 2mr^2)}, \quad a_4 = \frac{-(J + 2mr^2)ml^2 b}{I(J + mr^2) - ml^2(J + 2mr^2)}$$

$$b_1 = \frac{I - ml^2}{I(J + mr^2) - ml^2(J + 2mr^2)}, \quad b_2 = \frac{mlr}{I(J + mr^2) - ml^2(J + 2mr^2)}$$

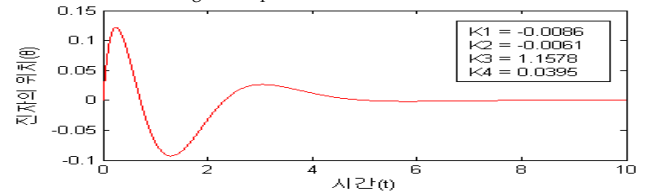
3. 결 론

컴퓨터시뮬레이션결과



〈그림 4〉 PID제어기의 응답

Fig 4 Response of the PID controller



〈그림 5〉 극점이 배치된 상태궤환제어기의 응답

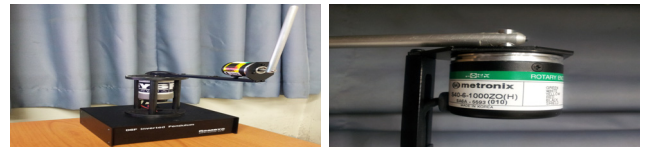
Fig 5 Response of the State Feedback Controller that pole is placed

〈표 2〉 PID제어기와 상태궤환제어기 비교

Table 2 compare with PID controller and State Feedback controller

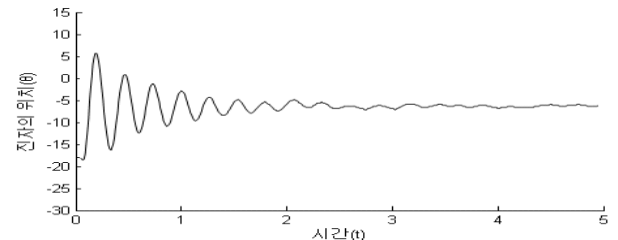
구분	PID제어기	상태궤환제어기
장점	- 구조의 간단하며 제어성능이 우수하다.	- 시스템의 상태변수를 기반으로 좋은 안정성을 가진다.
단점	- 이상적인 이득값을 시행착오를 거쳐 구해낸다. - 초기값 변경시 새로운 이득값을 정해 주어야 한다.	- 복잡한 수학적 해석이 필요하다. - 모든 상태변수를 알아야 한다.
적용화 방안	- 적절한 이득값 선택으로 오버슈트 없이 제어한다.	- 극을 충분히 안정한 영역에 배치 - 상태관측기를 설계하여 알 수 없는 상태변수 값을 추정하여 제어한다. - 두 개의 제어기를 조합해서 개선된 제어기를 설계 가능하다.

테스트용 회전형 도립진자



〈그림 6〉 테스트용 회전형 도립진자와 Rotary Encoder

제조회사 : Realsys 제품명 : 리얼시스 DSP Inverted Pendulum (2005년)



〈그림 7〉 PID제어기 진자의 추종특성

Fig 5 Response of the State Feedback Controller that pole is placed

[참 고 문 헌]

- [1] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. E. Naeini, "Feedback control of dynamic systems.", ADDISON WESLEY, 1994.
- [2] 조규정, 남정규, 현창호, "상태 관측기 기반의 출력제어를 이용한 도립진자시스템 제어실험", 한국지능시스템학회 2010 추계학술발표논문집, 20권 2호, 3-460, 2010.
- [3] 장기동, 허옥렬, "도립진자의 극배치", 89대한전기학회 추계 종합학술대회 논문집, 5-519, 1989.