

# 축 방향 하중을 받는 인장-굽힘-전단이 연성된 복합재 적층보의 파동특성 Wave Characteristic in the Axially Loaded Axial-Bending-Shear Coupled Composite Laminated Beams

장인준\*      이우식†  
Injoon Jang      Usik Lee

## ABSTRACT

The fiber reinforced composite materials have many advantages due to their high strength-to-density ratios. Thus they have been widely used in many industrial applications. As the wave propagation are closely related to dynamic analysis of structures, it is very important to predict them. This paper presents a wave propagation in the axially loaded axial-bending-shear coupled composite laminated beams which are represented by the Timoshenko beam models based on the first-order shear deformation theory.

## 1. 서론

복합재료는 높은 비강도로 인해 많은 산업에서 널리 사용되고 있다. 따라서 복합재료의 정확한 해석은 매우 중요하다. 복합재 적층보에 관한 많은 연구가 진행되어 왔는데 Dokumaci[1]는 Beroulli-Euler 보 이론을 이용 복합재 적층보의 동적해석을 수행하였고 Timoshenko 보 이론을 이용한 연구에는 Banerjee[2] 등이 있다. 본 연구에서는 구조물의 동적해석과 파동 전파는 밀접한 연관이 있기 때문에 Timoshenko 보의 1차 전단이론을 이용하여 축 방향 하중을 받는 인장-굽힘-전단이 연성된 복합재 적층보의 운동방정식을 유도하였다. 또한 운동방정식을 통해 파동방정식을 유도하였다.

## 2. 본론

### 2.1 운동 방정식

축방향 하중을 받는 인장-굽힘-전단이 연성된 복합재 적층보의 에너지들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L \{ EAu_0'^2 - 2Ku_0'\theta' + EI\theta'^2 + \kappa GA(w_0' - \theta)^2 + Pw_0'^2 \} dx \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho Aw_0'^2 + \rho Au_0'^2 - 2\rho Ru_0'\dot{\theta} + \rho I\dot{\theta}^2) dx \\
 \delta W &= N_{b1}\delta u_0(0) + N_{b2}\delta u_0(L) + M_{b1}\delta\theta(0) + M_{b2}\delta\theta(L) + Q_{b1}\delta w_0(0) + Q_{b2}\delta w_0(L) \\
 &\quad + \int_0^L [f_u(x,t)\delta u_0 + f_w(x,t)\delta w_0 + f_\theta(x,t)\delta\theta - c_1\dot{u}_o\delta u_o - c_2\dot{w}_o\delta w_o - c_3\dot{\theta}\delta\theta] dx
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서  $U$ 는 위치에너지,  $T$ 는 운동에너지  $\delta W$ 는 가상일을 나타낸다.

식(1)을 Hamilton Principle에 대입하여 정리하면 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다.

† 교신저자, 인하대학교, 기계공학과  
E-mail : ulee@inha.ac.kr  
\* 인하대학교, 기계공학과

$$\begin{aligned}
 EAu_0'' - K\theta'' - \rho A\ddot{u}_0 + \rho R\ddot{\theta} - c_1\dot{u}_0 + f_u(x,t) &= 0 \\
 \kappa GA(w_0'' - \theta') + Pw_0'' - \rho A\ddot{w}_0 - c_2\dot{w}_0 + f_w(x,t) &= 0 \\
 EI\theta'' + \kappa GA(w_0' - \theta) - Ku_0'' + \rho R\ddot{u}_0 - \rho I\ddot{\theta} - c_3\dot{\theta} + f_\theta(x,t) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

### 2.2 파동 방정식

식(2)에 해를 스펙트럴 형태로 가정하여 대입하면 정리하면 다음과 같은 형식의 파동방정식을 유도할 수 있다.

$$\lambda_1 k_n^6 + \lambda_2 k_n^4 + \lambda_3 k_n^2 + \lambda_4 = 0
 \tag{3}$$

식(3)의 계수들은 식(2)로부터 구할 수 있고 파수는 식(3)의 해를 계산함으로써 구할 수 있다.

### 3. 수치예제 및 결과

커플링 계수인 K값에 따른 파수와 그룹속도의 변화를 관찰하기 위해 수치예제에 사용된 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 144.84 \text{ GPa}, & E_2 &= 9.65 \text{ GPa}, & G_{12} = G_{31} &= 4.14 \text{ GPa}, & G_{23} &= 3.45 \text{ GPa} \\
 \nu_{12} &= 0.3, & \nu_{21} &= 0.02, & \rho &= 1389.79 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

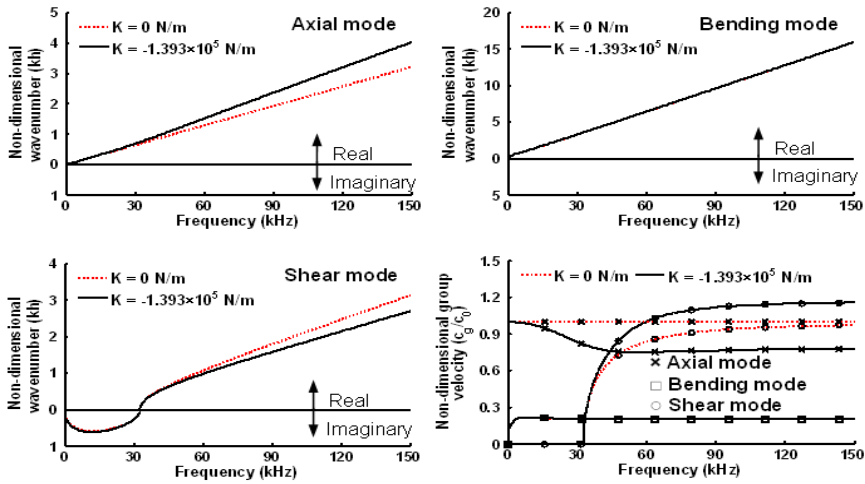


그림 1 파수와 그룹속도

그림1은 4개의 층으로 구성된 복합재의 커플링 계수인 K값에 따른 파수와 그룹속도를 나타낸다. 커플링 계수인 K값에 따른 가장 큰 차이는 Axial mode에서 관찰할 수 있는데 그룹속도를 보면 K값이 0인 경우 일정한 값을 나타내는데 반하여 K값이 있는 경우 감소 후일정한 값으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한 Shear mode의 그룹속도 또한 같은 Cut-off frequency를 갖는데 반하여 K값이 있는 경우는 없는 경우에 비하여 그룹속도가 작은 것을 알 수 있다. 식(3)을 통해 총6개의 파수를 구할 수 있으나 그림1에는 3개의 파수를 도시하였다. 그 이유는 나머지 3개의 파수는 그림1의 파수와 부호만 반대인 관계가 있기 때문이다.

### 4. 결론

본 연구에서는 축 방향으로 하중을 받는 인장-굽힘-전단이 연성된 복합재 적층보의 운동방정식을 Timoshenko 보의 1차 전단이론을 이용하여 유도하였고 유도된 운동방정식을 통해 파동방정식을 유도하였다. 커플링 계수인 K 값에 따른 복합재의 파수와 파의 그룹속도를 계산하였다.

## 후기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (과제번호 2010-0007741).

## 참고문헌

1. Dukumaci E., "An exact solution for coupled bending and torsion vibrations of uniform beams having single cross-section symmetry," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, No. 3, pp. 443~449, 1987.
2. Banerjee JR, " Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method," *Computers and Structures*, Vol. 69, pp. 197~208, 1998.