

Mie Theory를 이용한 알루미나 입자의 흡수 및 산란 특성 분석

고주용*† · 김인선*

Analysis of absorption and scattering characteristics of alumina particles using Mie theory

Ju Yong Ko*† · Insun Kim*

ABSTRACT

Radiative properties of alumina particles which is the main element of the plume from booster and kick motor used for increasing thrust and insertion into the orbit is analyzed. In order to derive the wavelength integrated (i.e., gray) emissivity, emission term in radiative transfer equation is rearranged to be able to tie up with the parameters induced from fundamental particle scattering Mie theory. Result shows that derived gray emissivity with optical properties increases with temperature rising.

초 록

발사체의 추력을 증진시키기 위해서 사용되는 고체 부스터나 궤도 투입을 위한 킥 모터 플룸의 주요 성분인 알루미나 입자의 복사물성을 도출하기 위해서 입자의 복사특성을 분석하였다. 특히 입자의 흡수나 산란현상이 파장의 함수이므로, 이를 전 파장에 대한 총방사율로 표현할 수 있도록 수식을 정리하였고, 입자의 크기 및 Complex Index of Refraction을 Mie 이론에 도입하여 최종적으로 총방사율을 도출하였다. 결과적으로 방사율은 온도에 따라 증가하는 것을 확인할 수 있었다.

Key Words: Mie Theory(미 이론), 발사체, 부스터(Booster), Plume(플룸), 알루미나 입자, 방사율

1. 서 론

발사체의 추력을 증진시키기 위해서 사용되는 고체 부스터(Booster)나 궤도 투입을 위한 킥 모터(Kick Motor)는 추진제 내에 알루미늄

(Aluminum)을 함께 섞어 추력을 향상시킨다. 이때 알루미늄의 연소 생성물인 알루미나(Alumina)는 연소생성물의 질량분율의 30% 정도를 차지하면서, 플룸의 유동장 및 복사열전달량 등에 영향을 미치게 되는데, 이로 인해 NASA 및 각 발사체를 개발하는 곳에서는 알루미나의 크기 분포 및 복사 물성치를 심도 있게 연구하였다[1]. 본 연구에서는 이러한 알루미나

* 한국항공우주연구원 발사체열/공력팀

† 교신저자, E-mail: sansa3@kari.re.kr

입자의 복사 물성치를 Mie 이론을 이용해서 도출하였는데, 정리된 자료들은 추후 이를 복사열 전달식과 유동장 해석 프로그램에 응용될 수 있을 것이다.

2. 입자의 복사 물성

2.1 단일 입자에 의한 흡수 및 산란

단일 입자에 대한 복사 물성을 알기 위해서는 먼저, 입자의 형태, 입자의 재질(Material), 입자의 Complex Index of Refraction $m = n - ik$, 크기 등이다. 이 중에서도 index of refraction m 을 적절히 도출해 내는 것이 중요하다. 더불어 복사 파장과 입자의 크기에 대한 Size Parameter $x = 2\pi a/\lambda$ 를 고려해야 한다[2]. Mie 이론은 x 가 너무 1보다 너무 작지도 않고(이 경우에는 Rayleigh Scattering 적용), 크지도 않은 범위를 다루게 되는데, 다행이도 이러한 범위가 주로 고려되는 연소 상황 등이다. 입사된 광자(Poton)가 입자에 의해서 흡수되고 산란되는 정도를 나타내기 위해서 주로 사용되는 용어가 Efficiency Factor Q 이다. 흡수, 산란 그리고 이 둘을 더한 값인 소멸 항은 아래와 같이 표현된다.

Absorption Efficient Factor, $Q_{abs} = C_{abs}/\pi a^2$

Scattering Efficient Factor, $Q_{sca} = C_{sca}/\pi a^2$

Extinction Efficient Factor, $Q_{ext} = C_{ext}/\pi a^2$

여기에서 C 는 Absorption Cross Section이며, a 는 입자의 반지름이다. 소멸 항은 입사된 광자가 시선방향으로 진행한 후 흡수 되거나 산란되는 것은 시선방향의 복사강도측면에서는 소멸된 것과 같기에 이러한 표현이 사용된다. 모든 입자에 의한 흡수, 산란을 계산하기 위해서는 위에 표현된 Efficiency Factor를 구해야만 한다. 입자에 의해서 θ 의 각도로 방향이 전환된 복사강도를 표현하기 위해서는 Amplitude Functions $S1(\theta)$, $S2(\theta)$ 에 비례한다. 방향이 전환된 복사강도는 아래의 식으로 표현된다.

$$\frac{I_{sca}(\theta)}{I_i} = \frac{1}{2} \frac{i_1 + i_2}{x^2} \quad (1)$$

여기에서 i_1, i_2 는 x, m, θ 의 함수로 Amplitude Function의 절대 값의 제곱이다. 식(1)에서 다시 Scattering Efficiency Function을 도출할 수 있으며, 아래의 식과 같다.

$$Q_{sca} = \frac{C_{sca}}{\pi a^2} = \frac{a^2}{\pi a} \int_{4\pi} \frac{I_{sca}}{I_i} d\Omega = \frac{1}{x^2} \int_0^\pi (i_1 + i_2) \sin\theta d\theta \quad (2)$$

추가로 산란과 흡수로 인한 총 소멸은 Amplitude Function의 실수부분과 관련되어 있다. 식(1), 식(2) 그리고 소멸과 관련된 항이 모두 Amplitude Function과 관련되어 있기 때문에 결국 입자에 의한 산란, 흡수 등은 이 함수를 적절히 도출하는 문제로 귀결된다. 완전한 Mie 수식을 통해서 도출한 Amplitude Function은 아래와 같다.

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos\theta) + b_n \tau_n(\cos\theta)]$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos\theta) + a_n \tau_n(\cos\theta)] \quad (3)$$

여기에서 π_n, τ_n 은 방향과 관련된 함수로 르장드르 다항식과 관련되어 있다. 그리고 여기에서 매우 중요한 Mie 산란 계수인 a_n, b_n 이 나오는데, 이들은 x 와 $y = mx$ 와 관련해서 아래의 관계를 가진다[3].

$$a_n = \frac{\psi'_n(y)\psi_n(x) - m\psi_n(y)\psi'_n(x)}{\psi'_n(y)\zeta_n(x) - m\psi_n(y)\zeta'_n(x)},$$

$$b_n = \frac{m\psi'_n(y)\psi_n(x) - \psi_n(y)\psi'_n(x)}{m\psi'_n(y)\zeta_n(x) - \psi_n(y)\zeta'_n(x)} \quad (4)$$

여기에서 ψ_n, ζ_n 는 Riccati-Bessel 함수이다. 이렇게 Mie 산란계수가 결정되면 이를 통해서 아래의 식으로 Q_{sca} 및 Q_{ext} 를 구할 수 있다.

$$Q_{sca} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{real}|a_n + b_n| \quad (5)$$

이 식과 함께 중요한 산란관련 함수인 산란 위상 함수(Scattering Phase Function)를 아래의 식을 통해서 구할 수 있다.

$$\Phi(\theta) = 2 \frac{i_1 + i_2}{x^2 Q_{sca}} \quad (6)$$

입사된 광선이 입자에 의해서 어느 방향으로 산란되는지는 입자의 산란에서 매우 중요한 역할을 한다. 그러나 위 식들에서 알 수 있듯이 이러한 계산은 매우 복잡하고 입사된 광선의 파장과 입자의 크기 등에 따라서 모두 다르므로 모든 파장 및 입자크기에 대한 계산을 수행하는 것은 엄청난 계산을 요구한다. 그러나 이렇게 파장 및 크기 그리고 Complex Index of Refraction m 에 대한 계산 결과는 입자의 특성 및 파장에 대해서 어떻게 산란이 일어나는지 정성적으로 알 수 있게 해준다. 아래의 그래프는 m 에 대한 산란 위상함수를 보여준다.

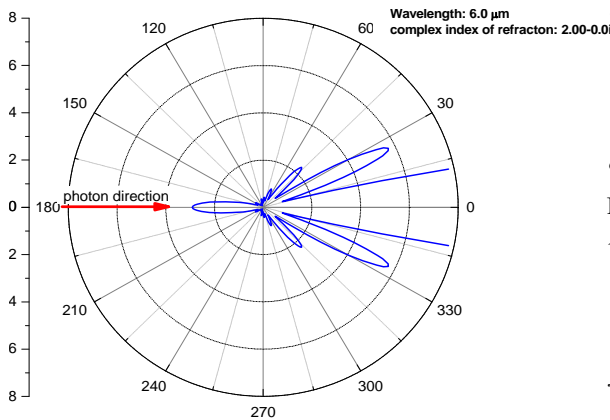


Fig. 1 Scattering Phase Function for $m=2.00-0.01i$

2.2 전 파장에 대한 입자의 복사 물성 방식

앞서 언급했듯이 입자에 의한 산란 및 흡수는 Complex Index of Refraction 및 Size Function 등에 의해서 매우 다양한 양상을 보이기 때문에 만약 이 하나하나를 고려해야 한다면, 수많은 경우에 대해서 복사 열전달식을 풀어야 한다. 이는 거의 불가능한 일이며, 따라서 이를 위해서 전 파장에 대한 적분 값을 구하는 것이 필요하다. 입자를 포함한 파장별 복사열전달식은 아래와 같다[2].

$$\frac{dI_\eta}{ds} = \kappa_\eta I_{b\eta} - k_\eta I_\eta - \sigma_\eta I_\eta + \frac{\sigma_{sca}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\eta(s_i) \Phi_\eta(s_i, s) d\Omega_i \quad (7)$$

여기에서 κ 는 흡수계수, σ 는 산란계수이다. 단, κ 는 $\kappa_p + \kappa_g$ 이며, 전자는 입자에 의한 흡수 항이며 후자는 참여가스에 의한 흡수 항이다. 본 연구에서는 입자에 의한 복사 물성을 다루고 있기 때문에 여기에서는 입자에 대한 내용만 다루기로 한다. 여기에서 중요하게 다루는 항은 $\kappa_\eta I_{b\eta}$ 으로 파장별 매질에서 방사되는 총 값을 구할 수 있도록 하기 위해서 전체파장에 대한 흡수계수를 구하도록 한다. 먼저 위항은 전체 파장에 대해서 적분해 보면 아래와 같다.

$$\int_0^\infty k_{p\lambda} I_{b\lambda} d\lambda = I_b(T) \int_0^\infty k_{p\lambda}(T) \frac{I_{b\lambda}(T)}{I_b(T)} d\lambda = I_b(T) \int_0^1 \kappa_{p\lambda}(T) df(\lambda T) \quad (8)$$

여기에서 $f(\lambda T)$ 는 Fraction of Blackbody Emissive Power로 이 값은 λT 에 따라서 아래의 식을 통해 구할 수 있다.

$$f(n\lambda T) = \frac{\int_0^\lambda E_{b\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty E_{b\lambda} d\lambda} = \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{C_2/n\lambda T e^\xi - 1} \quad (9)$$

정의에 의해서 파장별 흡수계수는 Absorption Efficiency Factor를 이용하고, 단위부피당 해당되는 입자의 개수와 함께 아래의 식처럼 나타낼 수 있다.

$$k_{p\lambda}(T) = \int_0^{\infty} \pi a^2 Q_{abs}(a, T) N(a) da \quad (10)$$

N 은 입자의 개수를 나타낸다. 식(10)을 식(8)에 대입해서 정리하면 아래와 같다.

$$I_b(T) \int_0^1 k_{p\lambda}(T) df(\lambda T) = \sum_{a_n} \pi a_n^2 N(a_n) I_b(T) \int_0^1 Q_{abs}(a_n, T) df(\lambda T) \quad (11)$$

이때, a_n 은 단위부피안의 n 번째 입자의 반지름을 나타낸다. 위 식은 결론적으로 부피기준으로 아래의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\lim_{V \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \frac{A_{pm} \sigma T_{pm}^4}{V \pi} \epsilon_{pm} \quad (12)$$

식(11)과 식(12)를 비교해보면, 입자의 방사율은 Absorption Efficiency Factor와 Fraction of Blackbody Emissive Power로 아래와 같이 도출할 수 있다.

$$\epsilon_{pm} \approx \int_0^1 Q_{abs}(a_n, T) df(\lambda T) \quad (13)$$

위 식은 매우 유용하게 적용할 수 있는데, 특히 프로그램의 Solver가 FVM(Finite Volume Method)를 이용한다면, 복사 열전달의 해석에 있어서 입자에 의한 방사 항을 구할 때, 단순히 방사율을 숫자로 넣지 않고 반지름과 온도의 함수로 나타낼 수 있기 때문이다. 이제 식(13)을 이용해서 알루미늄 입자 중 반지름이 $12\mu\text{m}$ 인 경우에 대해서 적용해 보고 온도에 따라 방사율을 도출해 보고자 한다.

3. 알루미늄 입자의 복사 물성

3.1 Complex Index of Refraction

알루미늄 입자의 가장 중요한 복사 물성인 m 은 해석과 실험 등을 통해서 심도 있게 연구되어 왔다. 특히 Complex Index of Refraction 중 허수항인 κ 의 값은 방사율을 계산하는데 가장 중요하다. 이 물성에 대한 종합적인 정리가 Reed[1]에 의해 수행되었다. Band Gap, E_g 에 대한 Drude의 모델을 이용하여 κ 값을 온도의 함수로 정리한 자료와 실험을 통해 자료를 정리한 연구[4] 등 다양한 연구결과를 기술하고 있다. 이 중 $0.6 - 8\mu\text{m}$ 의 범위에 대해서 실험을 수행하여 파장과 온도의 함수로 허수항을 정리한 Bakhir[5]의 연구는 3000K의 온도범위까지 결과를 보이고 있어서 고온의 연소조건에 적절한 모델이다. 따라서 본 연구에서는 Bakhir의 Complex Index of Refraction 자료를 이용한다.

$$\kappa = 2.0 \times 10^{-3} (1 + 0.7\lambda + 0.06\lambda^2) \times \exp(1.847 \times 10^{-3} (T - 2950)) \quad (14)$$

3.2 $a_n = 6\mu\text{m}$ ($D_p = 12\mu\text{m}$) 알루미늄 입자의 방사율 계산

방사율을 도출하기 위해서 먼저 Fraction of Blackbody Emissive Power 자료를 구하였다. 이를 위해서 열복사와 관련된 파장의 범위를 $0.1 \sim 65\mu\text{m}$ 로 선정하였다. 그리고 온도의 경우는 $500 \sim 3000\text{K}$ 의 범위를 선정하였다. 이렇게 되면 λT 의 최댓값은 약 200000 정도가 된다. $f(\lambda T)$ 의 값은 이 값에서 거의 1이 된다. 앞서 언급한 것처럼 이 값이 1이라는 것은 거의 모든 열복사에너지가 이 범위 안에 있다는 것이다. 이렇게 구해진 값들은 Fig. 2에 나타내었다. Fraction of Blackbody Emissive Power가 구해지면, Q_{abs} 를 구해야 한다. Q_{abs} 는 식(5)에서 구해진 Q_{ext} , Q_{scat} 를 통해서 구할 수 있는데, 전자에서 후자를 빼면 된다. 구해진 Q_{abs} 는 Fig. 3에 나타냈다.

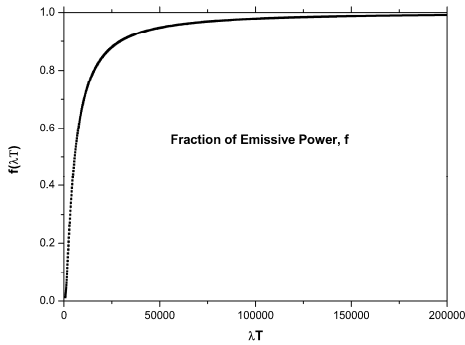


Fig. 2 Fraction of Emissive Power vs. λT

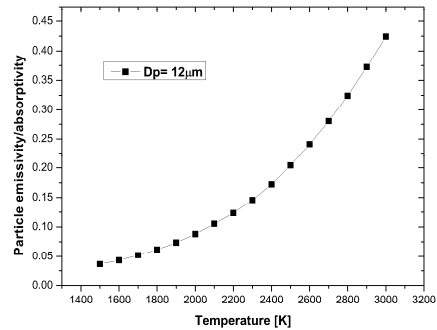


Fig. 4 Wavelength Integrated, i.e., gray particle emissivity vs. temperature

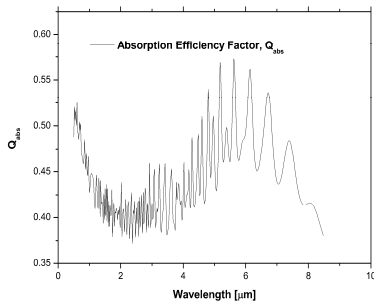


Fig. 3 Absorption Efficiency Factor vs. wavelength

식(13)에서 확인할 수 있듯이 방사율을 계산하기 위한 두 개의 항목이 구해졌으므로 방사율을 계산할 수 있다. 방사율은 지름이 $12\mu\text{m}$ 인 입자에 대해서 구해졌으며, 최종적으로 구해진 방사율은 아래의 Fig. 4에 나타내었다. 그림에서 확인할 수 있듯이 방사율은 온도가 증가할수록 증가한다. 약 2000K의 온도에서의 방사율은 약 0.1정도이며, 3000K에서는 약 0.42정도 된다. 이렇게 전 파장에 대한 총괄 방사율은 바로 복사전달식에 적용가능하다. 이렇게 되면, 단 한 번 복사 전달식을 풀어 원하는 열유속값을 얻을 수 있다. 이는 유동장과 연계해서 해석하는 과정에서 매우 큰 장점을 가진다.

4. 결론

발사체의 추력을 증진시키기 위해서 사용되는 고체 부스터(Booster)나 케도 투입을 위한 킥 모터(Kick Motor) 플룸의 주요 성분인 알루미늄 입자의 복사물성을 도출하기 위해서 입자의 복사특성을 분석하였고, 수식을 정리하였다. 특히 입자의 흡수나 산란현상이 파장의 함수이므로, 이를 전 파장에 대한 총방사율로 표현할 수 있도록 수식을 정리하였고, 입자의 크기 및 Complex Index of Refraction을 Mie 이론에 도입하여 최종적으로 총 방사율을 도출하였으며, 방사율은 온도에 따라 증가하는 것을 확인할 수 있었다. 차후 산란계수 및 산란 위상함수 또한 계산을 수행하여 입자에 대한 총괄복사 열전달 해석을 수행할 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. R.A. Reed, V.A. Calia, 'Review of aluminum oxide rocket exhaust particles', AIAA 93-2815, 1993.
2. 'Radiative heat transfer, 2nd, M.F. Modest, Academic Press, 2003.
3. A.F. Sarofim, 'Radiative transfer, H.C. Hottel, McGraw-Hill, New York, 1967.
4. Kittel. C., 'Introduction to solid state physics', Wiley Interscience NY, 1966.

5. L.P. Bakhir, G.I. Levashenko and V.V. Tamanovich, 'Refinement of the imaginary part of the complex refractive index of liquid aluminum oxide', J. Applied Spectroscopy(USSR), Vol.26, No.3, 1977.