

사운드링로켓의 고도 극대화를 위한 최적조건

박애니* · 이상현**†

Optimal Conditions for Maximizing Altitude of Sounding Rocket

Aeny Park* · Sang-Hyeon Lee**†

ABSTRACT

A study to determine the optimal jet conditions for maximizing altitude of the sounding rocket is conducted. The behavior of a simplified linear momentum equation including aerodynamic drag is investigated. The analytic solutions are obtained and compared with numerical solutions. It is shown that there are the optimal jet conditions for maximizing altitude of a sounding rocket according to the rocket mass ratio.

Key Words: Sounding Rocket(사운드링로켓), Optimal Jet Condition(최적 분사 조건), Rocket Mass Ratio(로켓 질량비)

1. 서 론

사운드링로켓 (Sounding Rocket)은 대기 및 근우주 탐사를 위해 필요한 과학 장치를 운반하는 로켓이다. 사운드링로켓은 궤도진입을 목표로 하지 않기 때문에 비싼 부스터 및 궤도 추적 장치 등이 필요 없어 발사비용이 궤도발사체에 비해 매우 저렴하기 때문에 다양한 목적으로 사용되고 있다. 사운드링로켓은 주로 상승 및 하강 시 대기 변화를 조사하거나 정점 근처에서의 근우주 탐사, 태양 및 행성관측 또는 심우주 관측 등에 많이 사용된다. 특히 정점 근처에서의 낮은 속도는 위성이나 궤도발사체에 비해 측정 및 관측의 정확성을 높이는 장점이 있다. 뿐만 아니라, Hyshot 프로그램의 스크램제트 시험에 응용되기도 하는 등 사운드링로켓은 넓은 영역에서 활용되

고 있다.

궤도발사체의 목표가 고도 및 궤도 속도에 있다면, 사운드링로켓의 주목표는 상승고도에 있다. 따라서 사운드링로켓의 예비설계단계에서는 주어진 질량의 화물을 목표고도에 진입시키기 위해 필요한 추진제의 총량, 시간 당 분사량, 추진제의 분사속도, 로켓의 상승 속도 등을 결정하여야 한다. 특히 추진제의 유량은 로켓 상승속도 및 최대상승고도를 결정하는 핵심 파라미터이다. 따라서 본 연구는 주어진 로켓의 형상, 로켓 자체 질량, 화물질량 및 추진제 질량 등 탑재 조건이 주어진 상태에서 최대 상승고도를 보장하기 위한 분사조건의 결정을 목적으로 한다.

사운드링로켓의 임무에 따라 발사각도가 수직이 아닌 경우도 있지만 본 연구에서는 수직 상승만을 고려하였다. 발사조건을 결정하는데 있어 어려운 점은 로켓의 고도 및 상승속도에 따라 대기의 밀도 및 항력이 변화하는 현상에 기인한다. 특히 밀도의 변화는 지배방정식을 해를 구하는

* 울산대학교 대학원 항공우주공학과

** 울산대학교 기계공학부 항공우주공학전공

† 교신저자, E-mail: lsh@mail.ulsan.ac.kr

데 매우 어려운 상황을 야기한다. 본 연구에서는 밀도가 일정한 대기를 가정하여 문제를 단순화하였다. 그리고 로켓의 추력은 동일한 분사속도에 대해 외압의 변화에 따라 달라지는데, 문제를 단순화하기 위하여 분사유동의 압력이 외압과 같은 완전팽창인 경우를 고려하였다.

2. 지배방정식

공력저항을 고려한 1차원 로켓 운동 Eq. 1은 다음과 같다.

$$m \frac{dv}{dt} = \dot{m} v_j - K v^2 - mg \quad (1a)$$

$$K = \frac{1}{2} C_d \rho_a S \quad (1b)$$

이때, v_j 는 추진제 분사속도이고, C_d , ρ_a , S 는 항력계수, 대기 밀도 및 로켓 단면적이다. 로켓 질량은 분사유량의 변화에 따라 변화한다.

$$m = m_o + \int_o^t \dot{m} dt \quad (2a)$$

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (2b)$$

2.1 해석적인 해가 존재하는 경우

지배방정식은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$m \frac{dv}{dt} = K(q^2 - v^2) \quad (3a)$$

$$q = \sqrt{\frac{\dot{m} v_j - mg}{K}} \quad (3b)$$

지배방정식의 해가 유일하게 존재하는 경우는 매개 변수 q 가 상수인 경우이다. 이 경우 해석적 해는 다음과 같다.

$$v = q \frac{x-1}{x+1} \quad (4a)$$

$$x = \left(\frac{m}{mg + Kq^2} \frac{m_o g + Kq^2}{m_o} \right)^{\frac{2v_j}{q}} \quad (4b)$$

이때, 파라미터 q 가 상수이므로 질량변화에 따라 질량유량도 달라진다. 추진제 완전소모 시 파라미터 x 의 값이 매우 큰 값을 가지므로 로켓의 속도는 q 값과 같아진다. 질량 및 추진제 완전소모시간(t_r)은 다음과 같이 결정된다.

$$m = \left(m_o + \frac{Kq^2}{g} \right) \exp\left(\frac{g}{v_j} t \right) - \frac{Kq^2}{g} \quad (5a)$$

$$t_r = \frac{v_j}{g} \ln \left(\frac{m_r g + Kq^2}{m_o g + Kq^2} \right) \quad (5b)$$

2.2 분사유량이 일정할 때 근사해

사운드로켓으로 주로 사용되는 고체추진제 로켓은 분사량 조절이 쉽지 않기 때문에, 상승 고도나 속도에 관계없이 분사유량이 일정하게 유지되는 경우가 대부분이다. 분사유량이 일정한 경우에는 Eq. 3에서 보이는 바와 같이 파라미터 q 가 상수가 아니어서 해석적 적분이 불가능하고 따라서 지배방정식의 해석적 해를 구하는 것이 불가능하다. 하지만, 파라미터 q 를 상수처럼 취급하여 근사해를 구하는 것은 가능하다. 이 경우 해석적 해는 다음과 같다.

$$v = q \frac{x-1}{x+1} \quad (6a)$$

$$x = \left(\frac{m}{m_o} \right)^{\frac{2Kq}{\dot{m}}} \quad (6b)$$

질량 및 추진제 완전소모시간(t_r)은 다음과 같이 결정된다.

$$m = m_o + \dot{m} t \quad (7a)$$

$$t_r = \frac{m_r - m_o}{\dot{m}} \quad (7b)$$

추진제 완전소모 시 로켓의 속도는 q_r 값과 같아진다.

$$v = q_r = \sqrt{\frac{\dot{m} v_j - m_r g}{K}} \quad (8)$$

2.3 추진제 소모 후 로켓 속도

추진제를 완전히 소모한 뒤에는 로켓이 추력 없이 관성 비행하게 된다. 따라서 지배방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$m \frac{dv}{dt} = -Kv^2 - mg \quad (9)$$

이 방정식은 해석적 해가 존재한다.

$$v = \sqrt{\frac{g}{k_r}} \tan [J_r - \sqrt{gk_r}(t - t_r)] \quad (10a)$$

$$J_r = \tan^{-1} \sqrt{\frac{k_r}{g}} v_r, \quad k_r = \frac{K}{m_r} \quad (10b)$$

최대상승고도는 최종속도가 0일 때까지의 상승고도인데, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$h_s = \frac{1}{2k_r} \ln \left(\frac{k_r v_r^2 + g}{g} \right) \quad (11)$$

2.4 수치 해

계산조건이 주어지면 지배방정식을 수치적으로 적분하여 해를 구할 수 있다.

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{\dot{m}^k v_j + K(v^k)^2}{m^k} - g \quad (12)$$

이때 지수 k 는 n 시각과 $n+1$ 시각 사이의 시각으로, $k = n + 1/2$ 로 설정하는 경우 상당히 정확한 해를 구할 수 있다.

3. 최대 상승고도를 위한 최적 분사조건

상승고도는 추진제 소모 이전과 이후의 상승고도의 합이며, 분사유량의 변화와 상관없이 해의 형태가 동일하므로 일반적으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$h = h_r + h_s = \int_0^{t_r} q \frac{x-1}{x+1} dt + h_s \quad (13)$$

이때, 시각 t_s 는 최대 상승고도일 때의 시각이다. 상승고도는 추진제 완전소모 시 속도(v_r)와 밀접한 관련이 있으므로 최대상승을 위한 최적조건을 찾기 위해 v_r 로 미분하여 변화가 0이 되는 조건을 찾을 필요가 있다. 우선 우변의 마지막 항에 대한 미분은 Eq. 11을 미분하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dh_s}{dv_r} = \frac{2v_r}{k_r v_r^2 + g} \quad (14)$$

우변의 첫 번째 항의 미분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dh_r}{dv_r} = \int_0^{t_r} \frac{\partial}{\partial v_r} q \frac{x-1}{x+1} dt + q_r \frac{dt_r}{dv_r} \quad (15)$$

이 미분의 결과는 파라미터 q , x 및 시간 t_r 에 따라 달라진다.

최대 상승고도에 이르는 최적 분사조건은 다음 식을 만족한다.

$$\frac{dh}{dv_r} = \frac{dh_r}{dv_r} + \frac{dh_s}{dv_r} = 0 \quad (16)$$

3.1 해석적인 해가 존재하는 경우

Equation 15에서 적분 내부의 미분 항을 우선 살펴보자. 추진제 완전 소모 시 속도가 q 이므로

$$\frac{\partial}{\partial q} q \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} q \frac{\partial x}{\partial q} \quad (17)$$

이때 우변 마지막 항의 미분은 Eq. 4b에 로그함수를 취하여 미분을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$q \frac{\partial x}{\partial q} = -x(\ln x + f) \quad (18a)$$

$$f = \frac{4Kqv_j}{m_o g + Kq^2} \frac{(m_o - m)g}{mg + Kq^2} \left(1 + \frac{Kq^2}{mg}\right) \quad (18b)$$

Equation 17~18을 Eq. 15에 대입하면 우변 첫째 항의 적분을 표현할 수 있는데, 이 적분은 해석적으로 적분이 불가능하므로 수치적으로 적분하는 것이 필요하다.

Equation 15에서 우변 마지막 항은 Eq. 5b를 미분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial t_r}{\partial q} = \frac{v_j}{g} \frac{2Kq(m_o - m_r)}{(m_r g + Kq^2)(m_o g + Kq^2)} \quad (19)$$

3.2 분사유량이 일정한 경우

분사유량이 일정한 경우에 대해 Eq. 15에서 적분 내부의 미분 항을 우선 살펴보자. 추진체 속도 시 속도가 $v_r = q_r$ 이므로

$$\frac{\partial}{\partial v_r} q \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} \frac{\partial q}{\partial v_r} + \frac{2q}{(x+1)^2} \frac{\partial x}{\partial v_r} \quad (20)$$

이때 우변 첫 번째 항의 미분은 Eq. 8을 미분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial q}{\partial v_r} = \frac{v_r}{q} (1 + \xi), \quad \xi = \frac{(m_o - m)g}{m_r g + Kq^2} \quad (21)$$

Equation 20 우변 마지막 항의 미분은 Eq. 6b에 로그함수를 취하여 미분을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial x}{\partial v_r} = \frac{xv_r}{q^2} \left[\ln x \left(1 + \xi - \frac{2Kq^2}{m_r g + Kq^2}\right) - \frac{4K^2 q^3}{m mg} \xi \right] \quad (22)$$

Equation 20~22를 Eq. 16에 대입하면 우변 첫째 항의 적분을 표현할 수 있는데, 이 적분은 해석적으로 적분이 불가능하므로 수치적으로 적분하는 것이 필요하다.

Equation 16에서 우변 마지막 항은 Eq. 7b를 미분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial t_r}{\partial v_r} = \frac{2Kv_r}{m} \frac{m_o - m_r}{m_r g + Kq^2} \quad (23)$$

일반적으로 근사해가 수치해 보다 크기 때문에 Eq. 20~23에 포함된 q 값을 조절할 필요가 있다. 본 연구에서는 0.85를 곱한 값을 사용하였다.

3.3 계산 조건

화물을 포함한 로켓의 질량을 200Kg으로 설정하였으며, 발사 초기 질량 및 추진체 질량은 다음과 같이 질량비를 이용하여 결정한다.

$$r = \frac{m_o}{m_r} \quad (24a)$$

$$m_p = m_o - m_r = m_r(r - 1) \quad (24b)$$

로켓 연소기 내 온도와 압력은 2500K, 100기압으로 설정하였고, 대기의 온도와 압력은 300K, 1기압으로 설정하였다. 밀도는 상태방정식을 이용하여 결정하였다. 노즐 출구 유동은 이상과정으로 대기압으로 가속되는 조건을 사용하였다.

로켓 단면의 직경은 0.3m, 항력계수는 보통 0.7~1.0사이의 값을 갖는데, 본 연구에서는 0.9인 경우를 고려하였다.

수치계산에서, 모든 경우에 대해 전체 분사 시간을 100등분하여 시간 간격을 결정하였다.

4. 결과 및 분석

4.1 해석적 해가 존재하는 경우

Figure 1은 해석적 해가 존재하는 경우의 속도를 수치적 해와 비교한 그림이다. 질량비(r)은 4이다. 해석적 해와 수치해가 거의 일치함을 알 수 있다. 속도는 초기에 일정한 가속도로 증가하지만, 최종단계로 갈수록 일정한 속도로 수렴하는 것을 볼 수 있다.

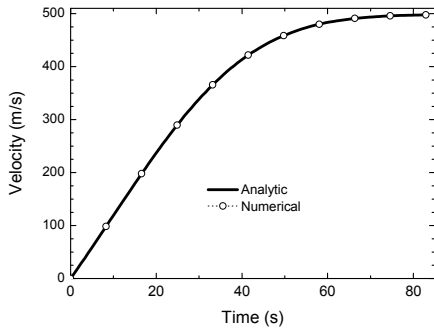


Fig. 1 Velocity and Altitude Profile

상승고도는 수치적분을 통해서 구한 값인데, 초기에 가속적으로 증가하다가, 최종단계에 가까워질수록 선형적으로 증가하는 것을 볼 수 있다.

Figure 2는 해석적 해가 존재하는 경우에, v_r 의 변화에 대한 최대 상승고도의 변화를 비교한 그림이다. Eq. 17 조건을 만족하는 경우와 비교하기 위하여 다음 매개변수를 도입하였다.

$$\phi = \frac{v_r - v_{r,opt}}{v_{r,opt}} \times 100 (\%) \quad (25)$$

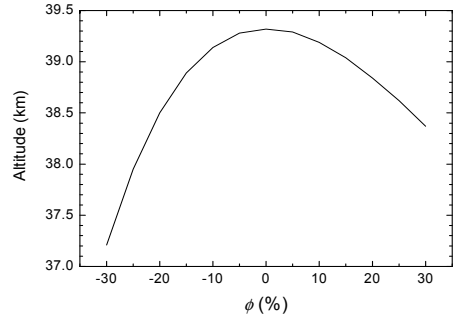


Fig. 2 Variation of Altitude

최적 분사조건에서 최대 상승고도를 나타내는 것을 확인할 수 있다.

4.2 분사유량이 일정한 경우

Figure 3는 분사유량이 일정한 경우의 속도를 수치 해와 비교하였다. 질량비(r)은 4이다.

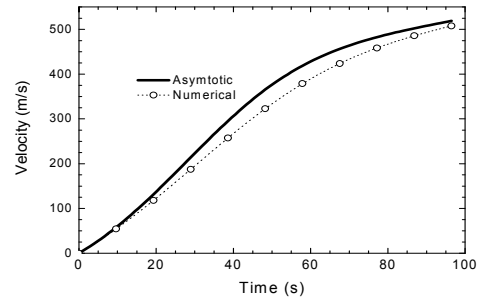
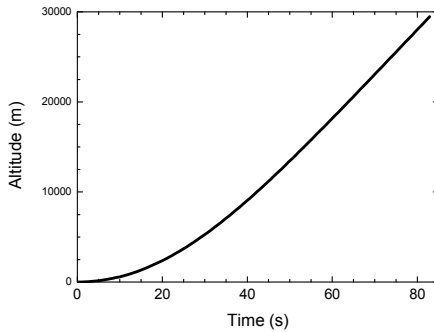


Fig. 3 Velocity and Altitude Profile

근사 해와 수치해가 어느 정도 차이가 있지만, 경향성은 일치하는 것을 볼 수 있다. 근사 해와 수치해의 차이는 최대 약 10% 정도로 나타났다.

상승고도는 수치적분을 통해서 구한 값인데, 최기에 가속적으로 증가하다가, 최종단계에 가까워질수록 선형적으로 증가하는 것을 볼 수 있다.

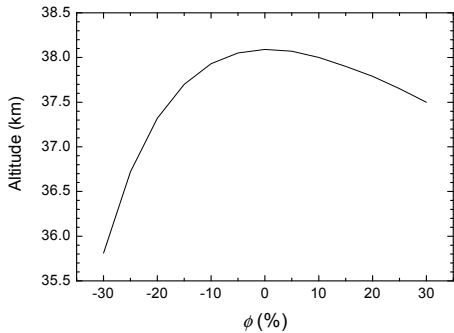


Fig. 4 Variation of Altitude

최적 분사조건에서 최대 상승고도를 나타내는 것을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 공력저항을 고려한 1차원 운동 방정식을 이용하여 사운드 로켓의 상승고도를 최대가 되는 최적 분사 조건을 결정하기 위한 해석적 방법론을 모색 하였다.

방정식의 해석적 해가 존재하는 경우, 해석적으로 구한 속도는 수치적으로 구한 속도와 거의 일치하였고, 분사유량이 일정한 경우, 속도의 변화가 수치적으로 구한 속도와 경향은 비슷하나 최대 약 10% 정도의 오차를 보였다.

상승고도를 최종속도에 대해 미분하여 0이 되는 조건을 최적 분사조건으로 결정하였는데, 최적 분사조건에서 최대 상승고도를 나타내는 것을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. G. P. Sutton and O. Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*, AIAA, John Wiley and Sons, 7th Ed. 2001.