고정점 반복을 이용한 양방향 필터의 수렴 분석

함범섭, 손광훈
연세대학교 전기전자 공학과
mimo@yonsei.ac.kr, khsohn@yonsei.ac.kr

Convergence Analysis on Bilateral Filter with a Fixed Point Iteration

Bumsub Ham Kwanghoon Sohn
School of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University

요 약

양방향 필터 (Bilateral filter)는 에지 보전 평활화 필터로써 디노이징, 반사 제거, 스테레오 매칭 등 다양한 분야에서 사용되고 있다. 이는 기존의 가우시안 필터에 사용되는 공간 도메인 커널 (spatial kernel)이외에 강도 도메인 커널 (range kernel)을 추가로 사용하여 비슷한 강도의 픽셀에 높은 가중치를 부여함으로써 에지를 보전하면서 평활화를 한다. 또한 양방향 필터는 비등방성 확산 필터 (Anisotropic diffusion filter)와 달리 항상 수렴을 보장한다. 따라서 본 논문에서는 고정점 반복 이론을 적용하여 양방향 필터의 수렴을 수학적으로 증명한다.

1. 서론

에지 보전 평활화는 에지, 코너 등과 같은 중요한 특징점들을 보전하면서 노이즈, 미세한 텍스쳐 정보를 평활화하는 작업이다. 이를 이용하면 신호 내부에 포함되어 있는 근본적인 구조 정보를 추출할 수 있기 때문에 많은 연구가 진행되고 있다.

에지 보전 평활화 필터는 필터의 성질에 따라서 선형 필터와 비선형 필터로 구분할 수 있다. 선형 필터의 대표적인 예로는 가우시안 필터 (Gaussian filter)가 있으며 이는 이차원 커널을 두 개의 일차원 커널로 분리하여 필터링을 할 수 있기 때문에 수행 속도가 빠르다. 하지만 단순히 픽셀의 거리에 의존해서 필터링을 수행하기 때문에 특정점들이 사라지는 문제가 있다 [1]. 비선형 필터는 비슷한 강도의 픽셀에 높은 가중치를 부여함으로써 특징점을 보전하는 이점이 있지만 복잡도가 높은 단점이 있다. 따라서 최근에는 비선형 필터의 복잡도를 줄이는 연구가 활발히 진행중이다 [2]. 비선형 필터의 대표적인 예로는 양방향 필터 (Bilateral filter) [3], 비등방성 확산 필터 (Anisotropic diffusion filter) [4], 평균 이동 필터 (Mean shift filter) [5], 적응적 필터 (Adaptive filter) [6] 등이 있다. Barash 와 Comaniciu 는 이러한 필터들의 관계를 증명하였다 [7].

비선형 필터 중 가장 널리 이용되는 필터 중 하나는 양방향 필터이다. 이는 디노이징 [3], 반사 제거 [8], 스테레오 매칭 [9], HDRI (High-Dynamic-Range Image)의 양자화 [10] 등 많은 분야에서 이용되고 있다. 양방향 필터의 성능이 우수하지만 이를 뒷받침 하는 이론적인 근거가 부족하기 때문에 많은 연구자들이 이를 찾기 위해 노력하고 있다 [7, 11]. 비등방성 확산 필터는 결국 편미분 방정식(열 방정식)의 해를 구하는 과정이므로 시간 변수에 따라서 수렴도가 결정된다 [4]. 이와 달리 양방향 필터는 비등방성 확산 필터와 달리 항상 수렴을 보장한다. 따라서 본 논문에서는 고정점 반복 이론을 이용하여 양방향 필터의 수렴을 수학적으로 증명한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 절에서는 양방향 필터의 정의를 살펴보고, 이의 수렴을 보이며, 3 절에서는 본 논문의 결론을 맺는다.

2. 양방향 필터의 수렴 분석

양방향 필터는 비선형 필터의 하나로, 상대적으로 중요도가 떨어지는 영역을 평활화 하면서, 중요한 특징점을 보전하는 필터이다. 이는 공간 커널 (spatial kernel)과 강도 커널 (range kernel)을 동시에 사용함으로써 강도 도메인에서 비슷한 강도를 가지는 픽셀과 공간 도메인에서 공간적으로 가까운 픽셀에 가중치를 줌으로써 필터링을 진행한다 [3].

$I^0(\mathbf{p}):[0,M]\times[0,N]\rightarrow \cdots$, $[0,M]\times[0,N]\subset \cdots^2$ 를 2 차원 영상이라고 하면 양방향 필터는 다음과 같이 정의된다.

$$I^{t+1}(\mathbf{p})=\frac{\sum_{\mathbf{q}\in N_C(\mathbf{p})} g_S(\mathbf{q},\mathbf{p})\, g_R\left(I^t(\mathbf{q}),I^t(\mathbf{p})\right) I^t(\mathbf{q})}{\sum_{\mathbf{q}\in N_C(\mathbf{p})} g_S(\mathbf{q},\mathbf{p})\, g_R\left(I^t(\mathbf{q}),I^t(\mathbf{p})\right)} \quad (1)$$

$\mathbf{p}=[p_x,p_y]^{\mathrm{T}}$ 와 $\mathbf{q}=[q_x,q_y]^{\mathrm{T}}$, $\{\mathbf{p},\mathbf{q}\}\subset[0,M]\times[0,N]$ 는 위치 벡터를 의미하며 $N_c(\mathbf{p})$ 는 아래와 같이 이웃 픽셀의 집합을 나타낸다.

$$N_C(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q}|\mathbf{p}+\mathbf{d}, 0 \le \|\mathbf{d}\|_\infty \le C, C \subset \cdots\} \tag{2}$$

$g_S(\mathbf{q},\mathbf{p})$ 와 $g_R(I^t(\mathbf{q}), I^t(\mathbf{p}))$ 는 각각 공간 커널과 강도 커널을 의미하며 아래와 같이 단조 감소 함수를 사용하여 정의 된다.

$$g_S(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|^2}{\sigma_S}\right)\right\} \tag{3}$$

$$g_R(I^t(\mathbf{q}), I^t(\mathbf{p})) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\|I^t(\mathbf{q})-I^t(\mathbf{p})\|^2}{\sigma_R}\right)\right\} \tag{4}$$

σ_S 와 σ_R 은 각각 공간 커널과 강도 커널의 대역폭(bandwidth)으로 일반적으로 노이즈 추정의 역할을 담당한다.

Theorem. 양방향 필터는 항상 정해진 점 α 로 수렴한다.

Proof. 아래와 같은 함수를 정의하자.

$$I^{t+1}(\mathbf{p}) = f(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})), \quad t \ge 0 \tag{5}$$

$$f(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) = \frac{I^t(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{q}\in N_C(\mathbf{p})\backslash\mathbf{p}} g_S(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_R(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) I^t(\mathbf{q})}{1+\sum_{\mathbf{q}\in N_C(\mathbf{p})\backslash\mathbf{p}} g_S(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_R(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q}))} \tag{6}$$

$f(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q}))$ 는 식(1)의 양방향 필터를 의미한다. 또한 식 (3), (4)와 같은 커널을 이용하면 $sup\{g_S(\mathbf{q},\mathbf{p}) g_R(I^t(\mathbf{q}), I^t(\mathbf{p}))\} = 1$ 을 가정할 수 있으며 따라서 아래와 같은 식이 성립된다.

$$0 \le g_S(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_R(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) \le 1 \tag{7}$$

즉, 가중치의 합은 임의의 양수 D 로 제한이 된다.

$$0 \le \sum_{\mathbf{q}\in N(\mathbf{p})\backslash\mathbf{p}} g_S(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_R(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) \le D \tag{8}$$

또한 $g_S(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_R(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) \cdots I^t(\mathbf{q})$ 이기 때문에 $g_S(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_R(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) I^t(\mathbf{q})$ 는 공간 커널과 강도 커널의 값에 의존하게 된다.

즉, $\sum_{\mathbf{q}\in N_C(\mathbf{p})\backslash\mathbf{p}} g_S(\mathbf{p},\mathbf{q}) g_R(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) I^t(\mathbf{q})$ 또한 임의의 양수 $\tilde{D}$ 로 제한될 수 있다. 따라서 식 (5)는 아래와 같이 근사 된다.

$$f(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q})) \cdots sup\{f(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q}))\} = \frac{I^t(\mathbf{p}) + \tilde{D}}{1+\bar{D}} \tag{9}$$

where $0 < \bar{D} \le D$.

식 (9)는 고정점 반복과 같은 형태로 바뀌게 된다. 즉, $I^{t+1}(\mathbf{p}) = h(I^t(\mathbf{p}))$, $t \ge 0$ 이며 $h(I^t(\mathbf{p}))$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h(I^t(\mathbf{p})) = \frac{I^t(\mathbf{p}) + \tilde{D}}{1+\bar{D}} \tag{10}$$

따라서 고정점 반복 이론의 수렴조건을 이용하여 양방향 필터의 수렴을 증명할 수 있다. 이를 위하여 다음과 같은 가정을 하자.

$$h(I(\mathbf{p})) \in \mathbf{C}([0,255]) \tag{11}$$

$$h([0,255]) \subset [0,255] \ \text{(Contraction condition)} \tag{12}$$

함수 $\mathbf{C}(\cdot)$ 는 임의의 함수 $f(\cdot)$ 가 주어진 도메인에서 미분가능 함을 의미한다. 따라서 두 가정을 이용하여 함수 $h(\cdot)$ 를 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\gamma = \max_{0 \le I(\mathbf{p}) \le 255} |h'(I(\mathbf{p}))| = \left|\frac{1}{1+\bar{D}}\right| < 1 \tag{13}$$

γ 은 $\bar{D}$ 가 0 인 경우를 제외하고는 항상 1 보다 작은 값을 가지게 된다. 따라서 고정점 반복 이론의 수렴 조건에 따라서 $I(\mathbf{p}) = h(I(\mathbf{p})) \cdots f(I(\mathbf{p}), I(\mathbf{q}))$ 는 주어진 도메인 $[0,255]$ 안에서 하나의 해 α 를 가진다. 또한, $I^{t+1}(\mathbf{p}) = h(I^t(\mathbf{p})) \cdots f(I^t(\mathbf{p}), I^t(\mathbf{q}))$ 는 주어진 도메인 $[0,255]$ 안에서 임의의 초기치 $I^0(\mathbf{p})$ 에 대해서 항상 α 로 수렴한다.

나아가서, $\forall\, I(\mathbf{p}), I(\mathbf{q}) \in [0, M]$ 에 대하여

$$|h(I(\mathbf{p})) - h(I(\mathbf{q}))| \le \gamma |I(\mathbf{p}) - I(\mathbf{q})| \tag{14}$$

이므로

$$\begin{aligned} |\alpha - I^0(\mathbf{p})| &\le |\alpha - I^1(\mathbf{p})| + |I^1(\mathbf{p}) - I^0(\mathbf{p})| \\ &\le \gamma|\alpha - I^0(\mathbf{p})| + |I^1(\mathbf{p}) - I^0(\mathbf{p})| \end{aligned} \tag{15}$$

와

$$\begin{aligned} |\alpha - I^t(\mathbf{p})| &= |h(\alpha) - h(I^{t-1}(\mathbf{p}))| \le \gamma |\alpha - I^{t-1}(\mathbf{p})| \\ &\le \cdots \le \gamma^t |\alpha - I^0(\mathbf{p})| \le \frac{\gamma^t}{1-\gamma} |I^1(\mathbf{p}) - I^0(\mathbf{p})| \end{aligned} \tag{16}$$

를 만족한다. 즉, 식 (15)와 (16)을 이용하면 다음과 같은 식이 만족함을 보일 수 있다.

$$|\alpha - I^t(\mathbf{p})| \le \gamma^t |\alpha - I^0(\mathbf{p})| \le \frac{\gamma^t}{1-\gamma} |I^1(\mathbf{p}) - I^0(\mathbf{p})| \tag{17}$$ □

3. 결론

본 논문에서는 양방향 필터의 수렴에 대해 증명하였다. 양방향 필터는 적응적 필터의 일반화된 경우 이므로 [7], 이를 이용하면 적응적 필터의 수렴 또한 증명할 수 있으며, 나아가 비등방성 확산 필터의 수렴 역시 고정점 반복이론을 이용하여 증명할 수 있다.

참고 문헌

[1] F. C. Crow, " Summed-Area Tables for Texture Mapping," *ACM Trans. Graphics*, vol. 18, no. 3, pp. 207-212, 1984.

[2] Q. Ynag, K-H. Tan, and N. Ahuja, " Real-Time O(1) Bilateral Filtering," in *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 557-564, 2009.

[3] C. Tomasi and R. Manduchi, " Bilateral Filtering for Gray and Color Images," in *Proc. Int' l Conf. Computer Vision*, pp. 839-846, 1998.

[4] P. Perona and J. Malik, " Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, 1990.

[5] D. Comaniciu and P. Meer, " Mean Shift: A Robust Approach Toward Feature Space Analysis," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 5, pp. 603-619, 2002.

[6] P. S. Marc, J. S. Chen, and G. Medioni, " Adaptive Smoothing: A General Tool for Early Vision," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 13, no. 6, pp. 514-529, 1991.

[7] D. Barash and D. Comaniciu, " A Common Framework for Nonlinear Diffusion, Adaptive Smoothing, Bilateral Filtering and Mean Shift," *Image Vision Computing*, vol. 22, no. 1, pp. 73-81, 2004.

[8] Q. Yang, S. Wang, and N. Ahuja, " Real-time Specular Highlight Removal Using Bilateral Filtering," in *Proc. Eur. Conf. Computer Vision*, pp. 87-100, 2010.

[9] K. Yoon and I. Kweon, " Adaptive Support-Weight Approach for Correspondence Search," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 28, no. 4, pp. 650-656, 2006.

[10] F. Durand and J. Dorsey, " Fast Bilateral Filtering for the Display of High-Dynamic-Range Images," *ACM Trans. Graphics*, vol. 21, no. 3, pp. 257-266, 2002.

[11] M. Elad, " On the Origin of the Bilateral Filter and Ways to Improve It," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 11, no. 10, pp. 1141-1151, 2002.