Gumbel Mixed 모형을 이용한 용담댐 유역의 강수량 빈도 해석

Precipitation Frequency Analysis Using Gumbel Mixed Model in the Yongdam Dam Basin

이길성*, 선우우연**

Kil Seong Lee, Woo Yeon Sunwoo

요　　지

지난 2010년 9월 21일~22일 서울지역에 발생한 시간당 최고 250 mm의 집중호우는 짧은 지속 시간동안 강수총량이 컸기 때문에 재산 및 인명피해가 상당했다. 기존의 강우빈도해석은 각 사상의 강수총량 또는 지속시간별 연최대치강우량을 기준으로 산정하는 방식인데 이번 이상홍수의 경우에는 강수총량과 첨두강수량이 높음에도 불구하고 지속시간이 짧기 때문에 체감적 강도에 미치지 못하는 재현기간을 가질 것으로 생각된다. 그러므로 빈도해석 시 기존 일변량 빈도해석과 달리 이변량, 삼변량, 다변량의 빈도해석이 필요할 것으로 사료된다. 본 연구의 대상유역은 용담댐 유역으로 강수총량, 지속시간, 첨두값을 대상으로 상관관계를 비교하여 지속시간과 첨두강수량에 대한 Gumbel mixed 모형을 적용하여 그에 따른 재현기간을 산정하였다. 또한 단일 Gumbel 모형과의 비교를 통해 두 모형의 차이점을 밝힘으로써 Gumbel Mixed 모형에 대한 신뢰도를 높였다. 따라서 본 연구에서 제안한 Gumbel mixed 모형은 이상홍수 뿐 아니라 다양한 수문학적 설계와 관리에 유용할 것으로 기대된다.

핵심용어 : Gumble mixed 모형, 빈도 해석

1. 서론

지난 2010년 9월 21일 ~ 22일 서울지역에 발생한 시간당 최고 250 mm의 집중호우로 피해가 상당했다. 따라서 기존의 일변량 빈도해석과 달리 이변량, 삼변량, 다변량의 빈도해석이 필요할 것으로 사료된다. 본 연구에서는 우리나라에 가장 잘 맞는다고 알려진 Gumbel 확률분포형(건설교통부, 2000)의 Gumbel mixed 모형으로 첨두강수량과 강수 지속시간 변수간의 결합확률을 이용하여 빈도해석을 실시하였다. 대상유역은 금강댐 최 상류지경에 해당하는 용담댐 유역이다.

2. 이론적 배경

2.1 Gumbel 분포

Gumbel 분포는 GEV 분포형 중 형상 매개변수가 0인 분포로써 누가분포함수(cdf)와 확률밀도함수(pdf)는 다음 식 (1), (2)와 같다.

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right] \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\exp\left[-\frac{x-\alpha}{\beta} - e^{-(x-\alpha)/\beta}\right], \quad \text{for } -\infty < x < +\infty \tag{2}$$

* 정회원・서울대학교 건설환경공학부 교수・공학박사・E-mail: kilselee@snu.ac.kr

** 서울대학교 건설환경공학부 석사과정・E-mail: swwy@snu.ac.kr

Gumbel 분포는 2개의 매개변수를 가지며 method of moments를 사용하여 추정하였다.

2.2 Gumbel mixed 모형

Gumbel mixed 모형은 Gumbel (1960)에 의해서 제안되었으며 누가분포함수는 아래 식과 같다.

$$x,y) = F(x)F(y)\exp[-\theta(\frac{1}{\ln F(x)} + \frac{1}{\ln F(y)})^{\ 1}], 0 \le \theta \le 1 \qquad (3)$$

$$F(x) = \exp[-\exp(-x)] \qquad (4)$$
$$F(y) = \exp[-\exp(-y)]$$

여기서 θ는 확률변수 X, Y의 매개변수이며 식 (5)로 구한다(Oliveria, 1975, 1982).

$$\theta = 2[1 - \cos(\pi \frac{\rho}{6})], \text{ for } 0 \le \rho \le \frac{2}{3} \qquad (5)$$

상관계수 ρ는 product-moment 상관계수다. 확률변수 X와 Y의 상관계수 ρ값이 0보다 크고 2/3 보다 작을 때 결합분포(Joint distribution)이며 pdf를 다음과 같이 구할 수 있다(Yue et al., 1999).

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\alpha_x \alpha_y} F(x,y) e^{-c} \times \left\{ 1 - \theta \frac{e^{\frac{2(x-\mu_x)}{\alpha}} + e^{\frac{2(y-\mu_y)}{\alpha_y}}}{d^2} + 2\theta \frac{e^{2c}}{d^3} + \theta^2 \frac{e^{2c}}{d^4} \right\}$$

$$(0 \le \theta \le 1)$$

$$c = \frac{x-\mu_x}{\alpha_x} + \frac{y-\mu_y}{\alpha_y} \qquad d = e^{\frac{x-\mu_x}{\alpha_x}} + e^{\frac{y-\mu_y}{\alpha_y}} \qquad (6)$$

cdf는 식 (3)과 같다.

2.3 재현기간

확률변수 X와 Y의 결합확률(Joint probability)을 적용하여 결합확률과 조건부확률(Conditional probability)에 대한 재현기간 식을 아래와 나타낼 수 있다.

$$T_{x,y} = \frac{1}{1 - F(x,y)} \qquad F(x,y) = \Pr[X \le x,\ Y \le y] \qquad (7)$$

$$T_{x|y_0} = \frac{1}{1 - F(x|y_0)} \qquad F(x|y_0) = \Pr[X \le x,\ Y = y_0] \qquad (8)$$

$$T_{y|x_0} = \frac{1}{1 - F(y|x_0)} \qquad F(y|x_0) = \Pr[X = x_0,\ Y \le y] \qquad (9)$$

2.4 Gringorten 공식

Gringorten (1963)은 Gumbel 분포 계열의 비편기(unbiased)된 수문량(quantile)에 적용할 수 있는 식 (17)을 제안하였다. 본 연구에서는 확률 해석에 비교자료로 사용하였다.

$$P_k = \frac{k - 0.44}{N + 0.12} \qquad (10)$$

여기서 P_k는 비초과확률(non-exceedance probability), k는 데이터가 k번째 작은 순서를 뜻하고 N은 자료의 수이다. 또한 bivariate형식으로도 존재하는데 그 식은 다음 식 (11)과 같다.

$$G(q_i, v_j) = \Pr[Q \le q_i;,\ V \le v_j] = \frac{\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} n_{ml} - 0.44}{N + 0.12} \qquad (11)$$

n_{ml}은 변수 q_i의 m번째, v_j의 n번째 결합자료의 수이다. 식 (7)을 응용하여 한 개의 변수를 고정한 채 다른 한 개의 변수를 고려하는 확률식을 보일 수 있으며 식 (12)와 같다.

$$v\,|q_i) = \Pr[Q = q_i,\ V \geq v_j] = \frac{\sum_{l=1}^{j} n_{il} - 0.44}{N + 0.12} \tag{12}$$

3. 적용

3.1 대상유역

대상유역은 금강의 최상류지역인 용담댐유역이다. 안성장, 원통사, 장수, 대불 그리고 진안 등의 5개 강수관측소의 2007년 6월 1일부터 2010년 9월 30일 까지의 시자료($N = 995$)를 사용하였으며 총강수량, 첨두강수량, 강수 지속시간에 대한 기본통계량은 다음 표 1과 같다.

표 1. 총강수량(P), 첨두강수량(P_p)과 강수의 지속시간(D)에 대한 기본통계량

기본통계량	P (mm)	P_p (mm/hr)	D (hr)
평균(Average)	1.9947	5.2669	3.3045
분산(Variance)	24.6918	178.1917	15.6848
표준편차(Standard deviation)	4.9691	13.3488	3.9604

3.2 단일 Gumble 분포

강우사상 자료에서 총강수량, 첨두강수량, 강수 지속시간에 따라 Struges 식을 사용한 χ^2적합도 검정을 실시한 결과는 다음 표 2와 같다.

표 2. 3개 변수에 대한 Chi-square goodness of fit test

Goodness of fit test	P (mm)	P_p (mm/hr)	D (hr)	95%의 신뢰도
Chi-Square Value	9.48	11.07	8.72	14.06
통과	O	O	O	

각 변수들의 Chi-Square Value는 95% 신뢰도를 만족하였고 Gumbel 식의 매개변수를 구하면 표 3과 같다. 타당성을 확인하기 위하여 Gringorten 공식과 비교한 결과 전체적으로 비슷한 분포를 보이므로 결합분포가 타당함을 알 수 있으며 그림 1, 2와 같다. 3.3절 결과의 분석대상에서 제외되는 총강수량은 제외하였다.

표 3. 3개 변수에 대한 Gumbel 분포의 매개변수

Parameter	P (mm)	P_p (mm/hr)	D (hr)
α	3.8744	10.408	3.0879
β	− 0.2416	− 0.7406	1.5222

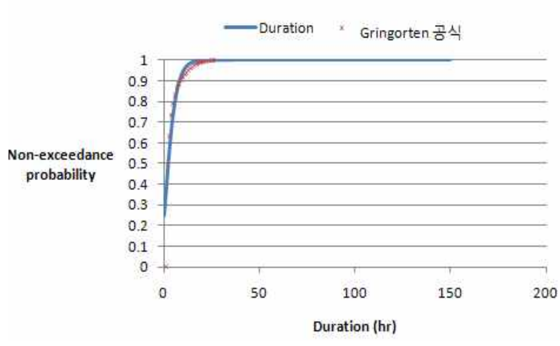


그림 2. 지속시간의 단일 Gumbel 모형 CDF 타당성 검토

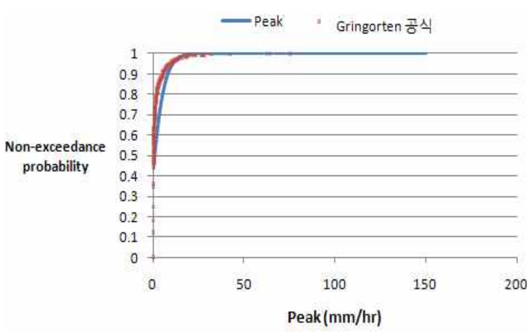


그림 3. 첨두강수량의 단일 Gumbel 모형 CDF 타당성 검토

3.3 Gumbel mixed 모형

확률변수   와 Y에 대한 매개변수   와, 상관계수 ρ를 구한 값은 다음 표 4와 같다.

표 4. 2 변수간의 상관계수

변수 X	변수 Y	ρ	$\hat{\theta}$
D (hr)	P (mm/hr)	0.4082	0.6348
P_p (mm/hr)	P (mm)	0.8004	1.1784
D (hr)	P (mm)	0.7152	1.0656

Gumbel mixed 모형을 위한 확률변수 X와 Y의 상관계수 범위는 0에서 2/3이다. 강수 지속시간과 첨두강수량 상관계수는 범위를 통과하였으나 나머지 두 경우에는 Gumble mixed 모형에 적합하지 않다. 따라서 본 연구에서는 지속시간과 첨두강수량만을 사용하여 빈도분석을 실시하였다. 두 변수에 대하여 결합확률를 적용하면 그림 3, 4와 같이 누가분포를 나타낼 수 있다. 각각에 대하여 조건부 확률과 두 변수의 단일 Gumbel 모형을 도시하여 비교하였다.

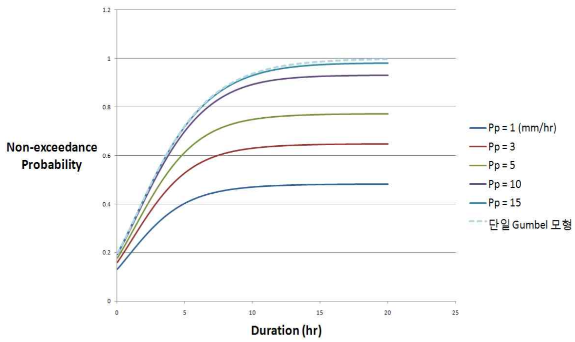


그림 3. 지속시간에 따른 첨두강수량의 Gumbel Mixed 모형 CDF

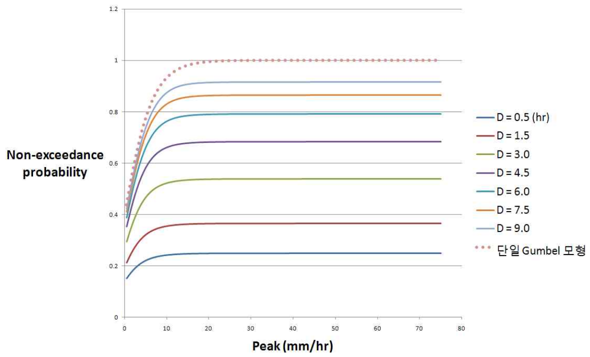


그림 4. 첨두강수량에 따른 지속시간의 Gumbel Mixed 모형 CDF

그림 3에서 지속시간만을 고려한 단일 Gumbel 모형이 첨두강수량 15 mm인 경우와 비슷한 것으로 보아 1 변수만 고려했을 경우 이상홍수의 경우에 적합하지 않음을 알 수 있다. 그림 4에서 첨두강수량을 고려한 단일 Gumbel 모형을 지속시간이 13시간 이상인 경우로 유추할 수 있다. 이는 보통의 강수 지속시간을 넘는다. 또한 Gumbel mixed 모형이 타당한지 확인하기 위하여 Gringorten 공식을 사용하여 지속시간 6시간인 경우와 첨두강수량이 15 mm일 때의 CDF를 비교하였으며 결과는 아래 그림과 같다. 확인 결과 Gumbel mixed 모형의 분포와 실측값이 상당히 근접하게 따라가는 것을 알 수 있다.

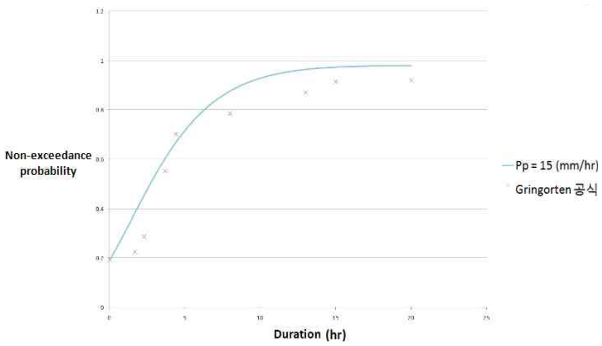


그림 5. 첨두강수량이 15 mm 일 때의 CDF 비교

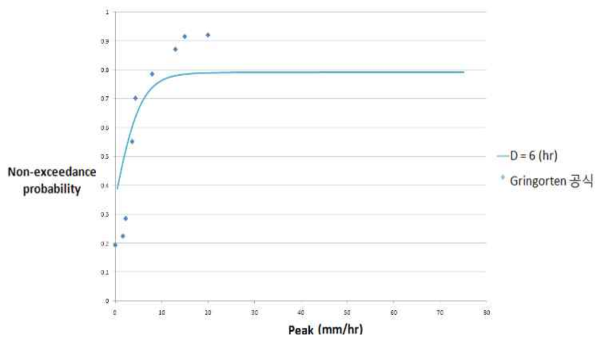
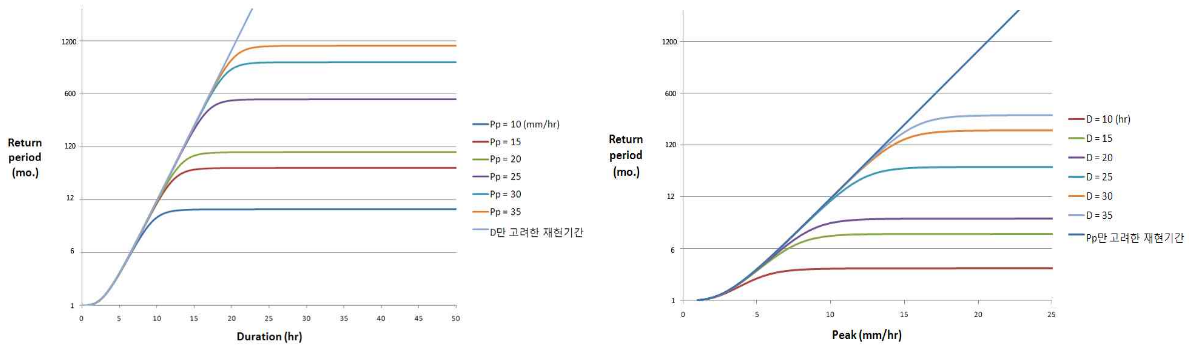


그림 6. 지속시간이 6시간일 때의 CDF 비교

3.4 재현기간

3.3 절에서 채택한 지속시간과 첨두강수량의 두 변수를 고려한 재현기간은 그림 8과 같으며 각각 지속시간과 첨두강수량에 따른 Conditional return period를 확인할 수 있다. 일변량만 고려한 경우 재현기간이 훨씬 높은 것을 확인할 수 있으며 이는 기존의 일변량의 확률해석이 과소설계되었을 가능성을 보여주고 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 이변량 Gumbel mixed 모형이 이상홍수 뿐 아니라 다양한 수문학적 설계와 관리에 유용할 것으로 기대된다. 예를 들어 재현기간 산정만 보더라도 강수총량 뿐 아니라 첨두강수량이나 그 밖의 변수들에 대한 적용이 가능한 것이다. 이것은 여러 수문학적 문제 해결에 정보를 제공하여 위험부담을 줄일 수 있게 할 것이다. 따라서 기존의 일변량보다 이변량 확률해석 시 더 구체적인 정보를 얻을 수 있을 것으로 보인다.



(a) 첨두강수량에 따른 지속시간 (b) 지속시간에 따른 첨두강수량

그림 7. Return period

참 고 문 헌

1. 건설교통부 (2000). 수자원관리기업개발연구조사 보고서.
2. Gringorten, I.I. (1963). "A plotting rule for extreme probability paper"., *J. Geophys*. Res., Vol. 68, No. 3, pp. 813-814.
3. Gumbel, E.J. (1960). "Multivariate extreme distributions." *Bulletin of the International Statistical Institute*, Vol. 39, No. 2, pp. 471-475.
4. Oliveria, J.T.D. (1975). "Bivariate extremes: extensions." *Bulletin of the International Statistical Institute*, Vol. 46, No. 3, pp. 241-251.
5. Oliveria, J.T.D. (1982). "Bivariate extremes: models and statistical decision." Technical Report No. 14, Center for Stochastic Process, Department of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill, NC, USA.
6. Yue, S., Ouarda, T.B.M.J., Bobee, B., Legendre, P., and Bruneau, P. (1999). "The Gumbel mixed model for flood frequency analysis." *Journal of Hydrology*, Vol. 226, pp. 88-100.