

낙동강 단호교 주변 흐름에 대한 수심적분 유한요소 모형의 적용

Application of Depth-Integrated Finite Element Model to Danhogyo Area in Nakdong River

이해균*, 이남주**
Haegyun Lee*, Nam-Joo Lee**

요 지

천수방정식에 대한 Lax-Wendroff 기법을 기반으로 한 유한요소 모형을 낙동강 상류부 단호교 지역에 적용하였다. 모형의 검증에 위하여 이동경계에 대한 Thacker (1981)의 정확해와 젖음-마름 기법(wet-dry scheme)을 이용한 본 모형의 수치해를 비교하여 대체로 잘 일치함을 알게 되었다. 또한, U자형 만곡부를 포함한 수로의 흐름에 적용하여, 기존의 수리실험 결과, 수치모의 결과와 비교하고, 모형의 적용 가능성을 확인하였다. 낙동강 상류지역에 위치한 단호교 지역에 본 모형을 적용하고, 이를 기존 유한차분법에 의한 수치해와 비교하였다.

핵심용어 : 천수방정식, 유한요소법, Lax-Wendroff 기법, 젖음-마름 기법

1. 서론

Navier-Stokes 방정식을 수심적분한 천수방정식(Shallow Water Equation)은 다양한 지표수 흐름문제에 적용되어 왔다. 또한, 유한요소법은 비구조적 격자를 사용하여 복잡한 경계를 갖고 있는 문제에 적용이 용이하여, 천수방정식의 공간차분에도 많은 적용 사례가 있다. 특히, Kawahara 등 (1982)의 선택적 질량집중 기법(selective mass lumping)과 시간 차분에 대한 Lax-Wendroff 기법의 적용 이후, 국내에서도 최성욱과 이길성 (1990)의 연구 등 많은 연구가 이루어져 왔다. 본 연구에서는 Kawahara 등 (1982)의 수치기법에 Sampson (2008)의 이동경계 모의를 위한 침수-노출 기법을 결합하여, Thacker (1981)의 포물선형 용기내의 이동경계 흐름 문제, Kuipers 와 Vreugdenhil (1973)의 만곡부 흐름 문제에 적용하였다. 마지막으로 낙동강 상류 지역에 위치한 단호교 부근의 흐름에 적용하였다.

2. 지배방정식 및 수치기법

천수방정식(shallow water equation)은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(UH) + \frac{\partial}{\partial y}(VH) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x}{\rho} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y}{\rho} = 0 \quad (3)$$

여기서 x, y 는 수평좌표, t 는 시간, h 는 수심, η 는 정수면상 수위, U, V 는 (x, y) 방향의 수심평균 유속, g 는 중력가속도이다. τ_x, τ_y 는 (x, y) 방향의 바닥마찰응력이다. 해저마찰력은 등류에서의 유추로부터, 전수심(total depth) $H (= h + \eta)$ 를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

* 정회원 · 단국대학교 (천안) 토목환경공학과 조교수 · E-mail : haegyun@dankook.ac.kr

** 정회원 · 경성대학교 토목공학과 교수 · E-mail : njlee@ks.ac.kr

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \frac{gn^2}{H^{7/3}} U \sqrt{U^2 + V^2} \quad (4)$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = \frac{gn^2}{H^{7/3}} V \sqrt{U^2 + V^2} \quad (5)$$

본 연구에서는 범람의 모의를 위하여 이동경계를 처리에 가장 일반적으로 사용되고 있는 침수-노출 기법(wet/dry technique)을 적용하였다. 이의 실행을 위해서는 그림 1과 같이 정수면(SWL) 이하의 영역에 양(+)의 수심을, 정수면 이상의 영역에 음(-)의 수심 값을 지정하고, 전수심(total depth)을 $H = h + \eta$ ($H \geq 0$)로 표시하였다. 그리고, 각 계산 단계에서 노출된 노드(node)의 침수와 침수된 노드의 노출에 대해서는 Sampson (2008)의 기법을 적용하였다.

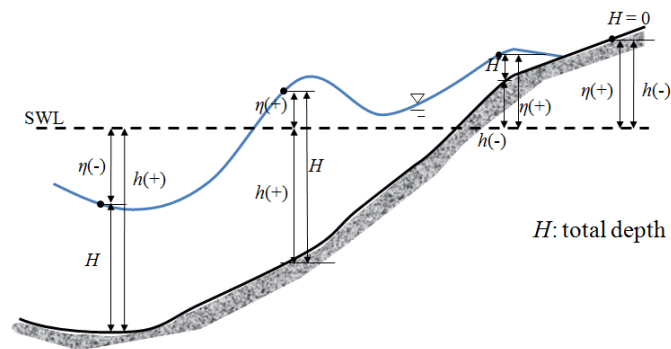


그림 1. 침수-노출(wet-dry)기법 모의를 위한 정수면상 수위, 수심, 전수심의 관계

3. 모형의 적용

3.1 이동경계의 모의

이동경계(moving boundary) 수치모형의 검증을 위하여 포물선 회전체형 용기내의 수면형상에 대한 비선형천수방정식의 정확해로 알려져 있는 Thacker (1981)의 해와 침수/노출 수치기법에 의한 결과를 비교하였다. Thacker (1981)는 포물선형 용기의 중앙에 위치하고 있는 포물선형 초기수면이 중력에 의하여 주기운동을 하는 경우에 대하여 이동경계를 포함하는 비선형천수방정식의 해를 구하였다. 그림 2는 초기 조건으로서 포물면 회전체(paraboloid) 형상을 하고 있다.

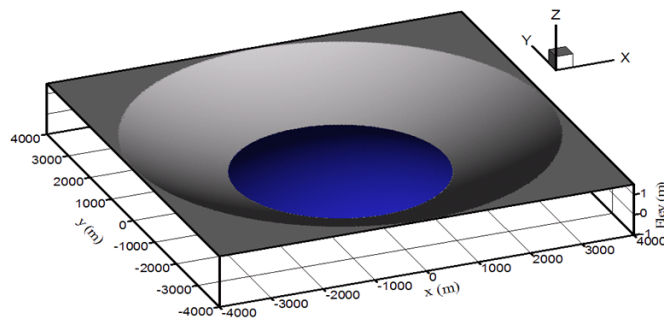


그림 2. 이동경계 모의를 위한 초기 자유 수면형

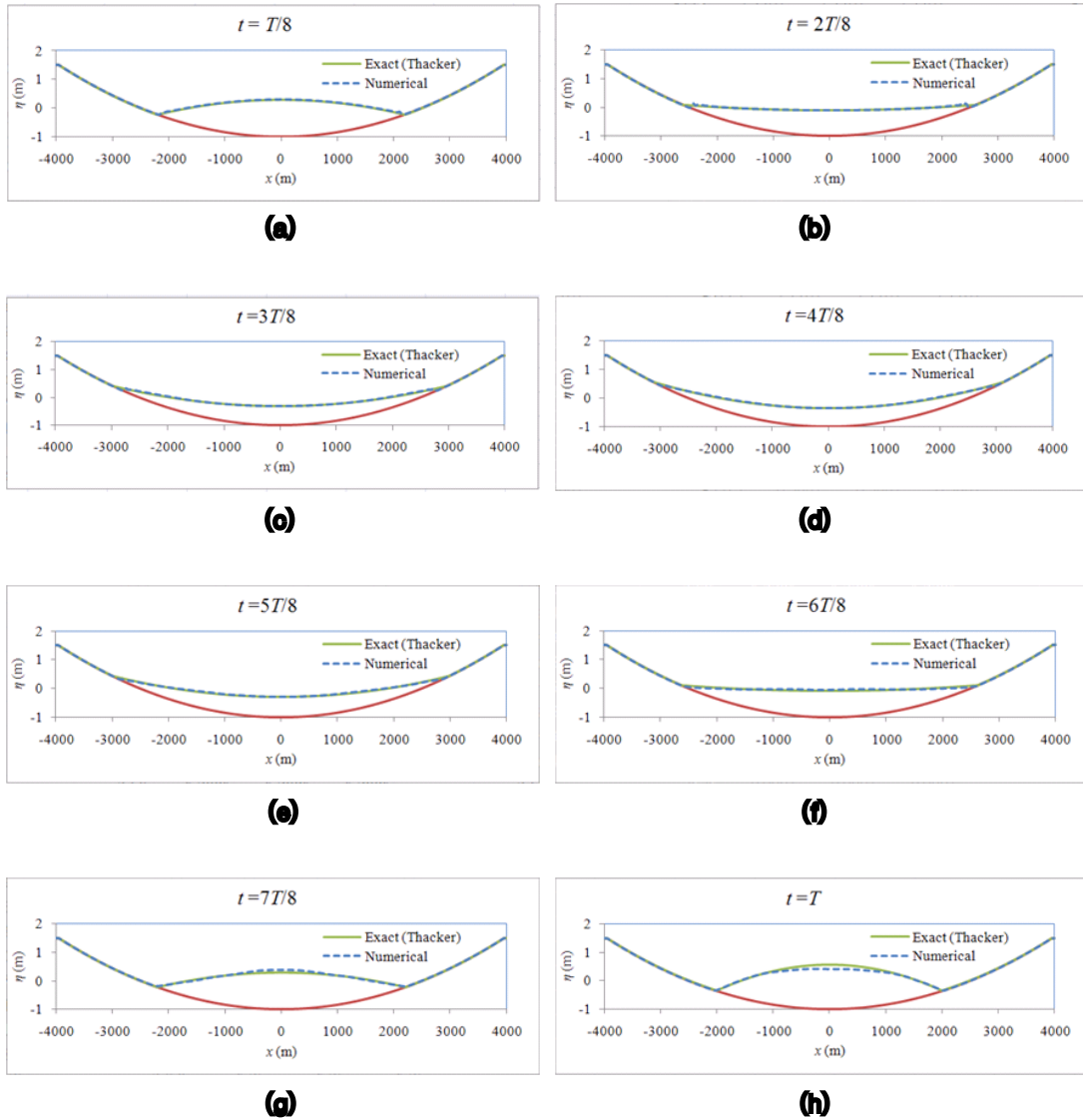


그림 3. 단면 $x=0$ 에서 수치해와 Thacker의 해석해 비교

포물선형 지형은 다음과 같다.

$$h = D_0 \left(1 - \frac{r^2}{L^2} \right) \quad (6)$$

여기서 D_0 는 포물선형 용기내 중심($r=0$)에서의 최대 수심이며, L 은 용기중심에서 운동정지상태, 즉, 정수면에서 해안선까지의 거리이다. 진동운동에 대한 각주파수(angular frequency)는 용기중심으로부터 거리 r 의 함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$\omega = \frac{2}{L} \sqrt{2gD_0} \quad (7)$$

본 적용 사례에서 주기($T=2\pi/\omega$)는 1773.13이다. 그림 3은 $T/8$ 시간 간격으로 $x=0$ 단면에서 Thacker (1981)의 정확해와 본 연구의 수치모의에 의한 결과를 비교한 것으로서 대체로 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2 만곡부 흐름의 모의

Kuipers와 Vreugdenhil (1973)의 만곡부 흐름 문제에 적용하였다. 그림 4는 모의에 사용된 유한 요소 격자이다. 만곡 수로의 폭은 1.7 m 로서, 그림 5는 안쪽, 바깥쪽 수로벽으로부터 0.17 m 떨어진 위치의 수위를 비교한 것이다. Kuipers와 Vreugdenhil (1973)의 실험값에 그들의 수치해와 비교할 때, 대체적인 경향에서 좋은 결과를 보임을 알 수 있다.

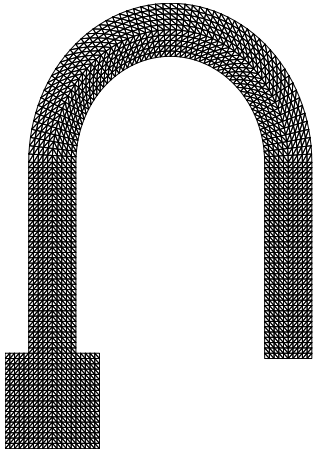


그림 4. 만곡부 흐름 모의를 위한 삼각형 격자 (1862 격자점, 3380 요소)

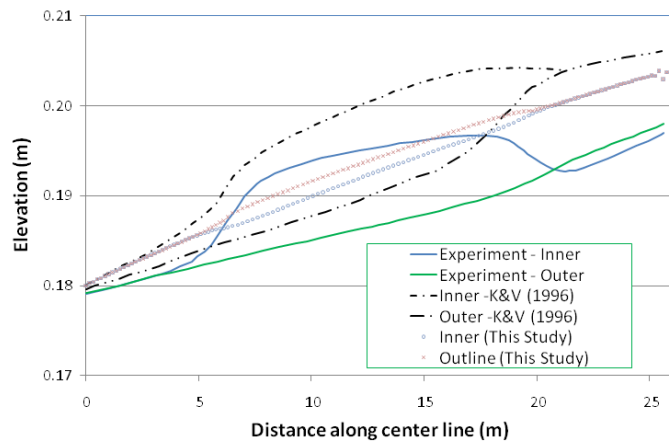


그림 5. 만곡부 흐름에서 수치해와 실험치의 비교

3.3 단호교 부근 흐름 해석

그림 6은 해석 대상 영역인 단호교 부근의 지형 및 격자를 나타낸 것이며, 그림 7은 흐름 해석 결과로서 유속 벡터를 도시한 것이다. 유입부에서 유량은 2,000 CMS를 가정하였다. 이남주 (2011)의 유한차분법에 의한 결과와 대체로 유사함을 확인할 수 있다.

4. 결론

천수방정식 기반의 유한요소법 모델을 이용하여 Thacker (1981)의 포물선형 용기내의 이동경계 흐름 문제, Kuipers와 Vreugdenhil (1973)의 만곡부 흐름 문제에 적용하여 해석해, 실험 결과와 비교적 잘 일치함을 확인하였으며, 낙동강 상류 지역에 위치한 단호교 부근의 흐름에 적용하였다. 향후, 최근의 연구결과를 반영한 정교한 수치기법을 보강하여, 보다 더 다양한 문제에 적용할 계획이다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 및 한국건설교통기술평가원 건설핵심기술연구개발사업의 연구비지원(O6건설핵심 B01)에 의해 수행되었습니다.

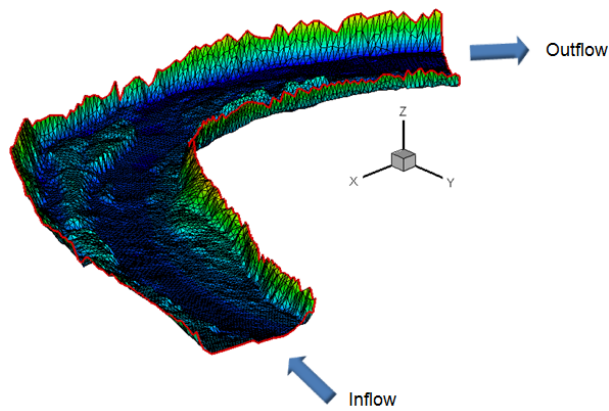


그림 6. 단호교 부근의 지형 및 격자

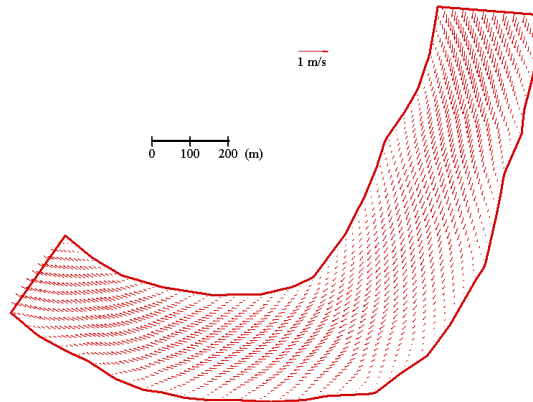


그림 7. 단호교 부근의 흐름 해석

참 고 문 헌

1. 이남주 (2011). "자연과 함께하는 하천복원 기술개발 5차년도 중간평가 발표 자료", 내부 보고서.
2. 최성욱, 이길성 (1990). "유한요소법을 이용한 천수방정식의 수치실험", 대한토목학회논문집, 제 10권 제4호, p. 141-150.
3. Kawahara, M., Hirano, H. and Tsubota, K. (1982). "Selective lumping finite element method for shallow water flow", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2, 89-112.
4. Kuipers, J. and Vreugdenhil, C. B. (1973). "Calculations of two-dimensional horizontal flow", Res. Rep. S163, Part I, Delft. Hydraulics Laboratory.
5. Sampson, J. (2008). "Some solutions of the shallow water wave equations", Ph.D. Dissertation, Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia.
6. Thacker, W. C. (1981). "Some exact solutions to the nonlinear shallow wave equation." *J. Fluid Mech.*, 107, 499-508.