축그린함수법을 이용한 정상상태의 스톡스유동해석

김 도 완[1*]

Steady Stokes flow analysis using Axial Green's Function Formulation

D.W. Kim

Using the axial Green's function method for Steady Stokes flows, we introduce a new pressure correction formula to satisfy the incompressibility condition, in which the pressure is related to the integral of the second order derivatives of the velocity. Based on this formula, we propose the iterative method for solving the Stokes flows in complicated domains. Even if the domain is complex, this method maintains the second order of convergence for the velocity.

Keywords: 전산유체역학(CFD), 정상유동(Steady Flow), 스톡스유동(Stokes flow), 축그린함수법(Axial Green's function method)

1. 서 론

복잡한 영역상에서 편미분 방정식의 수치해를 구하기 위해 최근 개발된 축그린함수법(Axial Green's function method)을 이용하여 정상상태의 스톡스유동해석을 위한 방법을 소개한다. 이 방법은 함수계수를 갖는 타원형 편미분방정식의 수치해를 복잡한 영역상에서 효율적이면서 정밀도를 갖도록 풀기위해 개발되었다.[1] 여기에는 축선(Axial lines)이라고 불리는 이산화 도구를 사용하는데 매우 복잡한 영역에서 격자(Grid)나 삼각화(Triangulation) 보다 훨씬 수월하게 이들을 만들 수 있다. 이점은 계산적인 측면에서 선처리에 드는 비용을 크게 줄일 수 있다는 잠점을 갖는다. 특히 3차원문제에서는 더욱 그렇다. 여기에서는 축그린함수법을 유체문제에 적용을 한다. 그 첫 번째 시도로 정상상태의 스톡스유체방정식에 축그린함수법을 적용해서 2차의 수렴성을 갖는 속도를 얻는다.[2] 실제로 이 방법을 적용하면 이산화 직전단계까지의 수학적 수식화 단계에서 영역내의 임의의 점에서의 교차하는 축선들 상에서의 새로 도입된 변수들에 대한 1차원 적분방정식이 얻어진다. 우리는 단지 이 적분방정식들을 1차원 수치적분을 통해서 이산화하여 얻어진 선형방정식들을 반복법을 고안해서 수치해를 구하거나 전체행렬을 구성하여 직접적인 수치해를 구한다. 반복적 방법이 메모리의 제약이 작기 때문에 여기서는 반복법을 제안한다.

1 인하대학교 수학과, KSIAM 정회원
* TEL : 032) 860-7639
* Corresponding author E-mail: dokim@inha.ac.kr

2. 축그린함수법

2.1 1D 문제의 그린함수

다음과 같은 1차원 문제를 생각하자.[3]

$$-(\kappa\, u_x)_x = \phi,\ \ x \in (a,b)$$
$$u(a) = u_a$$
$$u(b) = u_b.$$

여기서 $\kappa = \kappa(x)$와 $\phi = \phi(x)$는 각각 함수계수와 소스함수로 미리 주어져있다. 그리고 해 $u(x)$의 경계조건으로 u_a와 u_b 가 주어져 있다. κ가 연속일 경우 이문제의 해는 1차원 그린함수$G(x,\xi)$를 사용해서 표현된다.([3] 참조) 즉,

$$u(\xi) = \int_a^b G(x,\xi)\phi(x)dx + B[u_a,u_b](x)\ .$$

여기서 G와 경계조건에 의한 함수 B는 쉽게 구할 수 있다. 이 표현식을 이용하면 선분 $[a,b]$상에서 수치적분을 행하면 수치해 u_h를 직접적으로 구할 수 있다. 1차원에서는 선분 $[a,b]$가 축선(Axial line)의 역할을 한다. 실제로 축선은

2D 이상의 영역에서 정의된다. 1차원문제의 그린함수 표현식을 이용하여 다차원 유동문제를 풀 수 있는 방법을 다음 장에 제시한다.

2.2 2D 정상 스톡스 유동

2D 정상상태의 스톡스 유동은 다음의 방정식으로 기술된다.

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} = -\nabla p + \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega$$
$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{u}_B$$

여기서 $\boldsymbol{u}$는 유체의 속도, p는 압력, $\boldsymbol{f}$는 외력, 그리고 μ는 점성계수이다. 물론, Ω는 2차원 영역이다.

이들 방정식에 축그린함수법을 이용하려면 새로운 변수의 도입과 함께 이들을 분할하는 것이 필요하다. 즉, 영역상의 임의의 점에서 두 개의 축선, x-방향축선, y-방향축선이 영역내에 재하고 이들은 1차원 선분에 해당한다. 따라서 이들 1차원 선분상에서 편미분방정식들은 상미분방정식처럼기술 할 수가 있어서 **2.1**장에서처럼 1차원의 그린함수를 이용하여 축선들 상에서 해를 표현할 수 있다. 이렇게 해서 스톡스의 모멘텀 발란스 방정식을 이용하여 속도의 성분들에 대한 그린함수 표현식을 얻고 이들을 직접 미문하여 비압축 조건인 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$을 만족하도록 하면 압력과 속도와의 직접적인 연관방정식을 얻는다. 이를 이용하면 압력의 보정을 통한 반복적인 방법이 가능하고 이들이 속도에 관해 2차의 수렴성을 가진다는 것을 보일 수 있다. (자세한 사항은 논문 [2]를 참조하기 바람)

3. 계산결과

유동영역 Ω는 직사각영역 $[-5,5]\times[0,5]$ 내부와 돌기를 갖는 입자모양의 영역 외부라고 하자.(Fig.1 참조)

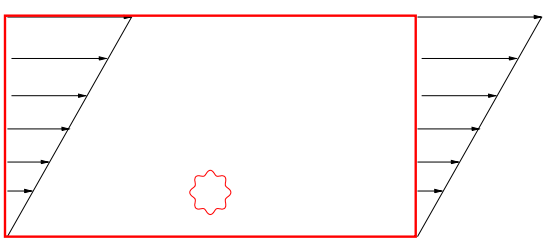

Fig. 1 유체영역과 shear 유동경계조건

이때 돌기입자 주위의 유동해석에 관심이 있고 이를 계산하기위해 Fig. 2 와 Fig. 3에서처럼 두 종류의 축선들을 계산을 위해 사용했다. 물론, 이들은 돌기입자근처에서 확대한 것 들이다. 전자는 군등적 분포의 두 방향의 축선들을 나타내고 있고 후자는 비균등적(적응적) 분포를 갖는 축선들을 보여주고 있다. 이들에서 보여주는 바와 같이 축그린함수법은 영역의 경계에서 경계의 모양에 관계없이 축선들의 교점들이 분포함을 알 수 있다. 이럴 경우 유한차분법의 경우 staggered 그리드를 사용해야 하나 매우 난감하다. 반면에 우리의 방법은 축선들의 교점에서 압력과 새로 도입된 변수들이 놓이는 장점을 갖는다.

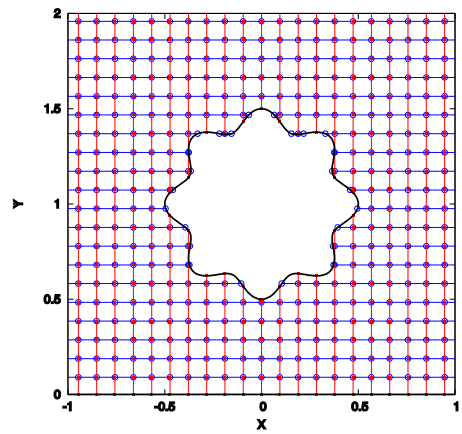

Fig. 2 균등적 분포의 축선(Axial lines)

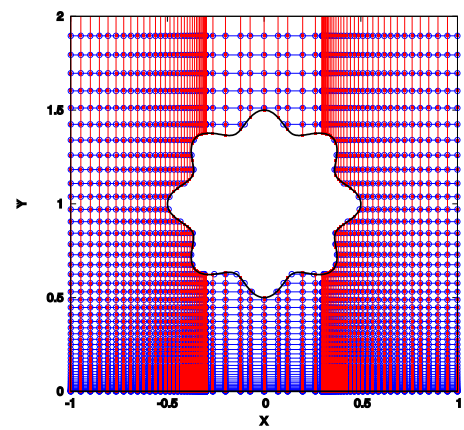

Fig. 3 비균등적 분포의 축선(Axial lines)

이들 축선을 이용해서 계산한 스톡스 유동의 속도성분 u와 v, 압력 P, 그리고 와도 ω를 두가지의 축선 분포에 대해 비교하였다. 돌기입자 주위의 유동에 관심이 있으므로 [-2,2]X[0,2] 영역에서의 해를 비교한 결과가 Fig. 4, Fig. 5,

Fig. 6, 그리고 Fig. 7에 나타나 있다. 두 종류의 축선에 대해 관련 수치해들이 서로 잘 일치함을 볼 수 있다.

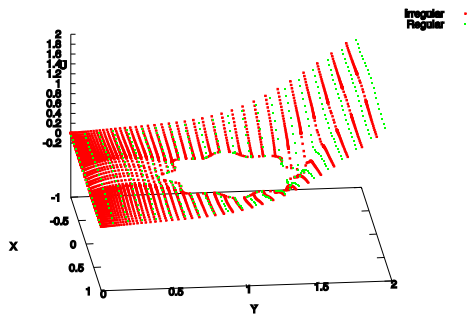

Fig. 4 속도성분 u의 비교 (영역 [-1,1]X[0,2])

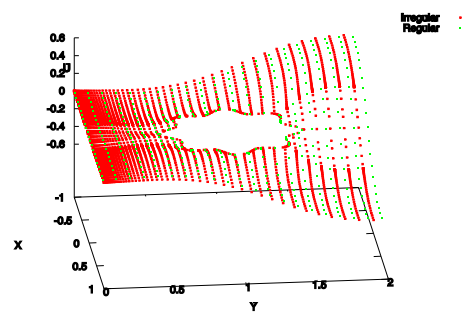

Fig. 5 속도성분 v (영역 [-1,1]X[0,2])

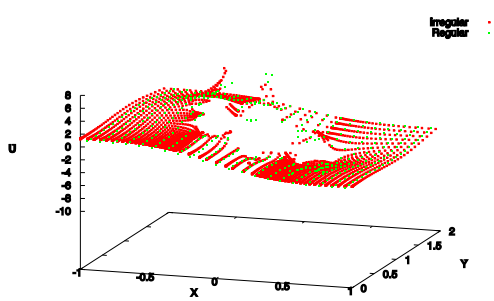

Fig. 6 압력 P (영역 [-1,1]X[0,2])

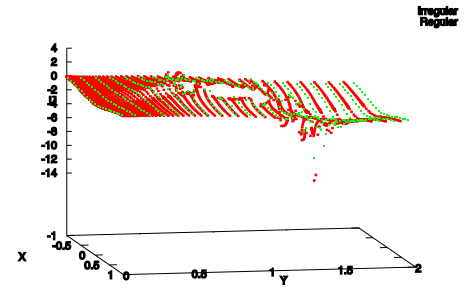

Fig. 7 와도 ω의 비교 (영역 [-1,1]X[0,2])

5. 결 론

축그린함수법을 이용하여 돌기입자 주위의 유동해석이 사용된 축선에 크게 의존하지 않는다는 것을 보일 수 있었다. 이는 이미 다양한 형태의 수렴성 조사를 통해 예견되었지만 복잡한 영역의 경우에도 축선의 의존성이 매우 낮다는 사실을 계산을 통해 확인 하였다.

참고문헌

[1] 2008, Kim D.W., Park S.-K, and Jun S., “Axial Green's function method for multi-dimensional elliptic boundary value problems”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 76, 697-726

[2] 2011, Jun S. and Kim D.W., “Axial Green's Function Method for Steady Stokes Flow in Geometrically Complex Domains”, Journal of Computational Physics, Vol. 230, 2095-2124 (2011)

[3] 1982, Roach G.F., Green’s Functions, Cambridge University Press, Cambridge