비정렬 격자상에서 Moment-of-Fluid 방법을 이용한 자유표면유동계산

안 형 택[1*]

MOMENT-OF-FLUID METHOD FOR FREE SURFACE FLOW SIMULATION USING UNSTRUCTURED MESHES

H.T. Ahn

The moment-of-fluid (MOF) method is a new volume-tracking method that accurately treats evolving material interfaces. The MOF method uses moment data, namely the material volume fraction, as well as the centroid, for a more accurate representation of the material configuration, interfaces and concomitant volume advection. In this paper, unstructured mesh extension of the MOF method is to be presented. The MOF method is coupled with a stabilized finite element incompressible Navier –Stokes solver for two materials. The effectiveness of the MOF method is demonstrated with a free-surface dam-break problem.

Keywords: 자유표면유동(Free Surface Flow), 체적추적(Volume-tracking), VOF 방법(Volume-of-Fluid Method), MOF 방법(Moment-of-Fluid Method), 안정화된 유한요소법(Stabilized Finite Element Method)

1. 서 론

본 논문에서 Moment 정보를 바탕으로 하여 자유표면 유동 계산의 정확도와 효율성을 높일 수 있는 새로운 방법인 Moment-of-fluid 방법을 소개하고자 한다. Moment-of-fluid(MOF) 방법은 자유표면유동해석에서 광범위 하게 사용되고 있는 Volume-of-fluid(VOF) 방법의 진보된 형태로서, 기존에 VOF 방법이 가지는 단점을 극복하고 보다 정확한 자유표면 유동 계산을 위하여 Ahn et al.[3] 에 의하여 최근에 개발되기 시작하였다. MOF 방법의 특징으로는 기존에 VOF 에서 한발 더 나아가서 유동해석에 관련된 체적정보를 Tracking 하는 것에서 한발 더 나아가서 각기 유체의 고차 모멘트 정보 (e.g. centroid)를 Tracking 함으로써 자유표면의 변화를 보다 정확하게 표현할 수 있으며, 또한 특정 계산 요소내 자유표면의 변화를 기술하는데 주위 요소의 정보를 필요로 하지 않음으로 인하여 계산 시간을 절약할 수 있을 뿐만 아니라 병렬 연산을 적용 하는데 유리한 장점을 가지고 있다.

1 종신회원, 울산대학교 조선해양공학부
* TEL : 052) 259-2164
* Corresponding author E-mail: htahn@ulsan.ac.kr

본 논문에서는 고려되는 자유표면 유동은 비압축성 유동으로 가정한다. 비압축성 유동의 해석을 위하여서는 대부분의 상용 해석 코드들이 유한체적법(Finite Volume Method) 기반의 방법을 사용하고 있다. 이는 방법론 자체가 보존방정식에 기반하여 직관적으로 이해가 쉽고 과거 오랜 기간 동안 개발된 Software 관성의 영향이 크다고 하겠다. 하지만 유한체적법 방법론의 특성상 2차 이상의 고차정확도를 구현하는 것이 거의 불가능하고, 해의 정확도가 격자의 균일도에 강하게 의존하는 단점이 지적되어 왔다.

본 논문에서는 이러한 단점을 극복할 수 있는 새로운 방법론을 적용하고자 한다. 그 대표적인 방법으로 보다 엄밀한 수학적인 기반을 가진 방법이라고 할 수 있는 유한요소법(Finite Element Method) 기반의 방법을 들수 있다. 유한 요소법 기반의 방법은 최소 2차 정확도 이상의 고차 정확도 해법에 적용될 수 있을 뿐만 아니라 격자의 균일도(regularity)에도 영향을 덜 받는 방법으로서 정렬격자(structured mesh) 뿐만 아니라 복잡한 형상에 적용이 쉬운 비정렬 격자(unstructured mesh)에서도 우수한 성능을 보이는 것으로 알려져 있다.

본 논문에서는 이러한 새로운 유동해석 방법론, 즉 유한요

소법에 기반하여 MOF 방법과 결합하여 자유표면 유동을 해석하는 기법을 소개하고자 한다.

2. MOF/Stabilized Finite Element Method

비압축성 점성유동을 기술하는 지배방정식은 미지수 속도 $\mathbf{u}$ 와 압력 p 를 구하기 위한 비압축성 Navier-Stokes 방정식으로 아래와 같이 기술될 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)-\nabla\boldsymbol{\sigma}=\rho\mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{u}=0 \end{aligned}\right\}\text{in } \Omega\ \forall t\in\left]0,T\right[. \tag{1}$$

여기서 ρ 는 유체 밀도, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 비압축성 Newtonian 유체에서의 유체 응력텐서로 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta 텐서, μ 는 점성계수이다. 자유표면유동은 물과 공기, 즉 2가지 서로 다른 유체의 혼상으로 이루어진다. 따라서, 하나의 지배방정식으로 두가지 서로다른 유체유동을 해석하기 위하여 혼합유체 모델이 필요하게 되면 이는 아래과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \rho_{mix}&=\rho_{water}f+\rho_{air}(1-f) \\ \mu_{mix}&=\mu_{water}f+\mu_{air}(1-f) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 f 는 0과 1사이의 값을 가지는 volume fraction이며, 본 논문에서는 아래 pure advection 방정식을 해로 주어지게 된다.

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\rho=0 \tag{4}$$

위 방정식은 VOF 방법 혹은 Level-set 방법등을 이용하여 해석이 가능하나, 본 논문에서는 VOF 방법의 확장형이라고 할 수 있는 MOF방법을 적용한다.

주저인 자유표면유동을 계산하기 위하여, 두가지 유체에 대한 비압축성 Navier-Stokes 방정식, 즉 변동밀도(variable density) incompressible Navier-Stokes 방정식을 비정상 해석하게 된다. 아래와 같이 경계조건이 주어지고 적절한 초기조건을 가정하였을 때 본 지배방정식을 만족하는 해를 구할 수 있는 필요조건이 만족된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}&=\mathbf{g} \quad \text{on}\,\Gamma_g \\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}&=\mathbf{h} \quad \text{on}\,\Gamma_h \end{aligned} \tag{5}$$

본 논문에서는 다양한 이산화 방법중 유한요소법을 이용하여 비압축성 Naiver-Stokes 방정식의 해를 수치적으로 구하여 보고자 한다. 유한요소법의 기본 개념은 원 지배방정식, 혹은 strong form, 으로 부터 변분방정식 (variational formulation), 혹은 weak form,을 유도하고 이에 대하여 유한개의 기저함수를 이용하여 수치적인 근사해를 구하게 된다. 본 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 유한요소 정식화는 아래와 같이 표현된다[1,2].

$$\text{Find}\,\mathbf{u}^h\in S_u^h \text{ and } p^h\in S_p^h \text{ such that } \forall\mathbf{w}^h\in V_u^h \text{ and } q^h\in V_p^h$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{w}^h\cdot\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}^h}{\partial t}+\mathbf{u}^h\cdot\nabla\mathbf{u}^h-\mathbf{f}\right)d\Omega-\int_\Omega\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{w}^h\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}^h,p^h\right)d\Omega \\ &+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\left[\tau_{SUPG}\mathbf{u}^h\cdot\nabla\mathbf{w}^h\right]\cdot\mathbf{R}\left(\mathbf{u}^h,p^h\right)d\Omega \\ &+\int_\Omega q^h\nabla\cdot u^h d\Omega \\ &+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}\left[\tau_{PSPG}\frac{1}{\rho}\nabla q^h\right]\cdot\mathbf{R}\left(\mathbf{u}^h,p^h\right)d\Omega \\ &=\int_{\Gamma_h}\mathbf{w}^h\cdot\mathbf{h}d\Gamma \end{aligned} \tag{6}$$

위 식에서 첫째 줄은 운동량방정식의 Galerkin Finite Element formulation 이고, 둘째 줄은 운동량방정식을 안정화 시키는 SUPG(steamline-upwind-Petrov-Galerkin) 항이고, 셋째 줄은 연속방정식이며, 넷째 줄은 연속방정식을 안정화 시키는 PSPG(presure-stabilizing-Petrov-Galerkin) 항이며, 마지막 우변은 traction boundary condition으

로 부터 유도된 항이다. 본 유한요소 formulation은 구조해석이나 고체변형에 쓰이는 standard Gakerkin finite element과는 다르게 안정화 항들을 포함하고 있고 이것은 유체유동 현상의 해석에 있어서 필수적인 항들이고 이런 이유로 안정화된 유한요소법 (stabilized finite element method)이라고 칭한다. 안정화 항의 크기를 결정하는 주요인자로 안정화 계수를 들수 있는데, 이는 아래와 같이 정의된다.

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\left\| \mathbf{u}^h \right\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right\}^{-1/2} \tag{7}$$

4. Dam-Break Problem

MOF방법과 안정화된 유한요소법을 이용하여 대표적인 자유표면유동 문제인 Dam-break 문제를 해석해 보았다. 서로 다른 3개의 격자계를 구성하고 이를 이용하여 해석하여 격자 수렴성을 확인하였다.

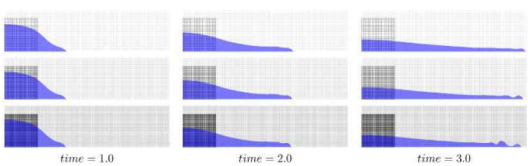

Fig. 1 Snap shots of Dam-break simulation using three levels of mesh. Top-100x25,Middle-200x50,bottom-400x100.

시간에 따른 자유표면의 전파추이를 실험결과와 비교하였다. 본 문에에서는 벽면의 속도 경계조건에서 Slip 허용하였다. 이로 인하여 Surge-front의 전파속도가 실험치 보다 상향 예측되는 것로 판단된다. 전반적인 경향에서 아래 그림에서 보이는 바와 같이 격자가 조밀할수록 실험결과와 잘 일치함을 확인하였다.

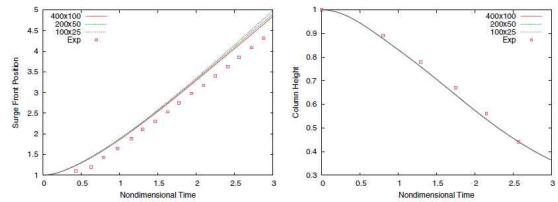

Fig. 2 Surge front position and column height compason with experimental data.

4. 결 론

본 논문에서는 Moment-of-fluid방법과 안정화된 유한요소법(Stabilized finite element method)을 이용하여 새로운 자유표면유동해석 방법을 소개하였다. MOF 방법은 VOF방법의 고차정확도를 위한 확장방법으로 자유표면유동해석에 성공적으로 적용될 수 있음을 확인하였다.

후 기

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임 (#2011-0005560)

참고문헌

[1] 1982, Brooks, A.N. & Thughes, T.J.R., "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 32, pp.199-259.

[2] 1992, Tezduyar, T.E., "Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations," Advances in Applied Mechanics, Vol. 28, pp.1-44.

[3] 2009, Ahn, H.T., Shashkov, M., & Christon, M.A., "The moment-of-fluid method in action," Communications in Numerical Methods in Engineering, Volume 25, Issue 10, pp.1009 - 1018.