한국소음진동공학회 2011년 춘계학술대회논문집, pp.837~842

쉽게 이해되는 랜덤진동 이론(I)

Brief Lecture on the Random Vibration Theory(I)

이강희† · 강흥석* · 김형규* · 패츠 토마스**

Kang-Hee Lee, Heung-Seok Kang and Thomas L. Paez

1. 서 론

랜덤진동이론은 랜덤한 하중을 받는 구조물의 입력과 응답 사이의 상관관계를 연구하는 분야다. 모든 기계 시스템은 정해진 수명동안 어느 정도 혹은 상당기간 랜덤한 하중을 경험하고, 이로 인하여 점진적인 기계적 손상이 발생될 수 있다. 특별히, 항공기와 축류 유동조건 내부에서 기능하는 구조물 등이 중요한 적용예가 된다. 랜덤진동 해석은 신호의 측정과 분석을 위한 신호처리 이론과도 긴밀하게 연관된다. 본 논문은 랜덤진동이론을 학습하는 과정에서, 습득했던 이론적인 내용을 공유하고, 정리하기 위해서 작성하였다. 랜덤진동이론은 확률 및 통계이론, 랜덤데이터 프로세싱 이론, 구조동력학 이론을 기본으로 하고 있다. 랜덤진동해석에 필요한 정보를 구성하기 위해서는 기본적으로 특정한 물리량의 랜덤한 성질을 정의해야하는데, 이때 확률이론과 랜덤 신호처리에서 사용되는 분석 도구들이 활용된다. 랜덤진동이론 분야는 편의상 기초 확률이론, 랜덤변수의 분포특성, 랜덤프로세스, 선형구조동력학, 선형계의 랜덤진동, 랜덤 프로세스의 특성, 비선형계의 랜덤진동, 기초통계학, 랜덤신호처리, 확률밀도함수의 추정, 랜덤진동의 현대적인 해석기법 등으로 주요한 내용을 나눌 수 있는데, 본 논문에서는 이론의 전반부인 선형계의 랜덤진동이론까지 기술하고 나머지 내용은 이어지는 논문에 나누어 기고하고자 한다.

2. 기초이론

2.1 랜덤변수와 분포특성

† 이강희 ; 정회원, 한국원자력연구원
E-mail : leekh@kaeri.re.kr
Tel : 042-868-2298, Fax : 042-863-0565
* 한국원자력연구원
** Thomas Paez Consulting

확률이란 랜덤실험의 결과(outcome)로, 특정한 사건(event)이 발생될 상대적인 가능성을 말한다. 랜덤실험은 특정한 행위나 동작(action)의 결과를 미리 알 수 없지만, 결과의 가능성(potential results)은 미리 규정할 수 있는 비교적 잘 정의된 행위나 동작 혹은 이들의 나열(sequence)이다. 이 때 사건(event)이란 랜덤실험의 결과(outcome, ω)나 이들의 집합(collection of outcome)을 말한다. 샘플공간(sample space)은 랜덤실험에서 발생가능한 모든 사건의 총집합(collection of event)을 말하는데, 외팔보 끝단에 랜덤하중이 작용할 때, 외팔보가 파단될 때까지 걸리는 시간을 측정한다고 가정하면, 실험의 결과는 $0<\omega<\infty$이고, 샘플공간은 $\Omega=\{\omega:0<\omega<\infty\}$이 되며, 발생가능 한 사건은 $E_1=\{\omega>5\}$, $E_2=\{10<\omega<20\}$, 등 여러 가지가 될 수 있다.

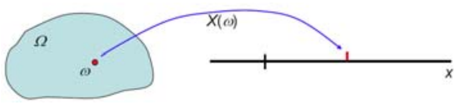

Fig. 1 랜덤실험 결과의 사상과 랜덤변수

랜덤변수(X)는 앞서 정의된 랜덤실험의 사건과 결과를 정량적으로 기술하기 위해서, Fig. 1과 같이 특정한 샘플공간에 포함된 결과들을 실수축의 한 점으로 사상(mapping)시킨 것이다. 따라서, 샘플공간의 특정한 영역을 나타내는 사건은 실수축 선상의 특정한 구간으로 맵핑된다. 이때, 확률밀도함수(PDF)에 의해서 정의되는 특정 사건의 가능성 $P[a<X<b]$이란, 랜덤실험을 수행했을 때, 수행된 결과가 랜덤변수 $X(\omega)$로 사상되고, 이 값이 사상된 공간(실수축선상)의 특정구간, 즉 a와 b사이에 존재할 가능성을 의미하게 된다. $P[a<X<b]$는 PDF를 구간 적분한 가능성을 나타내므로, 전 구간에 대한 PDF적분 값은 항상 1이 된다. 누적밀도함수(CDF)

는 PDF를 -∞부터, 특정한 x까지 적분한 것으로, PDF를 적분변환(integral transformation)한 개념이다. 즉, CDF를 x(맵핑공간의 독립변수)로 미분하면, PDF를 얻게 된다. Fig. 2는 정규 혹은 가우스 분포 특성을 갖는 랜덤변수의 PDF와 CDF를 나타낸다.

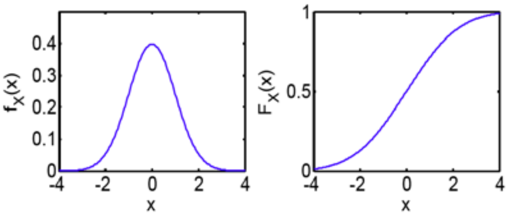

Fig. 2 Graphical representation of PDF and CDF

랜덤변수의 통계적인 특성은 평균, 분산, 표준편차와 같은 몇 가지 상수에 의해서 간략히 표현되는데, PDF $f_X(x)$, $-\infty<x<\infty$를 갖는 랜덤변수 X의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같이 정의된다.

$$E[X]=\mu_X=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \quad (Centroid\ of\ PDF)$$

$$V[X]=\sigma_X^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$$
$$(Second\ moment\ about\ centroid)$$
$$\sigma_X=\sqrt{V[X]} \tag{1}$$

랜덤변수 X에 의해서 정의되는 일변수 함수 $y=g(X)$의 PDF와 기대값은 식(2), (3)으로 표현된다.

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \tag{2}$$

$$E[Y]=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx \tag{3}$$

선형함수 $Y=aX+b$에 대하여, Y의 PDF, 평균, 분산은 아래와 같이 표현되는데, 정규분포를 갖는 확률변수들의 선형함수(혹은 선형조합)는 역시 정규분포를 따르고, 그 평균과 분산은 확률변수의 평균과 분산으로 간단하게 표현될 수 있다.

$$E[Y]=E[aX+b]=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f_X(x)dx=aE[X]+b=a\mu_X+b$$
$$V[Y]=V[aX+b]=\int_{-\infty}^{\infty}a^2(x-\mu_X)^2 f_X(x)dx=a^2V[X]=a^2\sigma_X^2 \tag{4}$$

2.2 다변수와 랜덤변수들의 결합 분포특성

하나의 랜덤실험 안에서, 관찰하는 조건(시간, 위치, 방향)에 따라, 여러 가지 랜덤변수가 발생될 수 있는데, 이때 랜덤변수들은 결합되어 동시에 분포한다고 말한다. 사건 A와 B가 각각 개별적으로 일어날 확률을 $P(A)$와 $P(B)$라 할 때, 두 사건이 동시에 일어날 결합 확률은 $P(A\cap B)$가 된다. 동일한 실험에서, 사건 A와 B가 각각 실수축상의 랜덤변수에 사상될 때, 즉, A={랜덤변수X가 x값을 갖는 사건}, B={랜덤변수 Y가 y값을 갖는 사건}, 이 둘 이상의 랜덤실험의 결과는 직교좌표계 혹은 다차원 좌표계의 한 점으로 사상될 수 있고, 랜덤변수 X, Y의 조합이 어떤 영역 내부에 있을 확률은 $P((X,Y)\in D)$이 된다. 여기서, 결합 확률밀도함수는 두 사건이 동시에 발생될 혹은 두 확률변수가 특정한 영역에 존재할 확률 $P((X,Y)\in D)$를 표현하는데, 두 사건에 대응되는 두 확률변수의 결합확률밀도함수(JPDF)는 식(5)과 같이 정의된다.

$$P((X,Y)\in D)=\int\limits_{(x,y)\in D}dx\int dy\ f_{XY}(x,y) \tag{5}$$

정의에 따라, 결합확률은 3차원 공간에 놓인 결합 PDF 곡면 $f_{XY}(x,y)$의 D영역이 차지하는 체적과 같은데, 이 때문에 JPDF의 값은 항상 양의 값을 갖고, 전체 구간에 대한 적분은 항상 1이 된다. 또 하나 중요한 성질은 JPDF로부터, 식(6)과 같이 개별적인 사건이 독립적으로 일어날 확률인 marginal PDF를 계산할 수 있다는 것이다.

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx \qquad -\infty<y<\infty$$
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \qquad -\infty<x<\infty \tag{6}$$

이 말은 결합 PDF특성을 알면, 개별적인 확률변수들의 각각의 확률을 계산할 수 있다는 의미가 되는데, 결국 랜덤변수들의 조합에 대한 통계적인 특성은 이들의 JPDF에 의해서 완전하게 기술된다는 것이다. 같은 맥락에서, JPDF를 갖는 두 랜덤변수 X, Y에 대하여, 이들의 CDF는 한 랜덤실험을 수행할 때, 랜덤변수 X가 폐구간 $(-\infty, x]$와 랜덤변수 Y가 구간 $(-\infty,y]$에 동시에 위치할 확률이 된다. 다수의 랜덤변수가 조합되어 분포할 때, 둘 사이의 통계

적인 관계를 규정하는 것이 중요한데, 독립 혹은 종속성이나 상관함수 혹은 상관관계 등으로 표현된다. 상호독립이란 말 그대로 두 관측결과나 사건이 통계적으로 관련성 없음을 의미하는데, 예를 들어, X가 구조물에 인가되는 입력하중이고, Y는 구조물의 응답일 때, 이 둘은 동시에 측정되거나, 또는 X와 Y는 각각 개별적으로 다른 시점에서 측정될 수 있다. 이 때, X와 Y가 완전히 임의적으로 비상관일 수 있으며, 이 때문에 조건부 확률을 이해하는 것이 중요한데, 이것은 다시 확률변수들의 통계적인 상관성 혹은 의존성에 관한 것이된다. 두 랜덤변수가 서로 독립이면, JPDF는 각 PDF의 곱으로 표현할 수 있다. 즉, $f_{XY}(x, y)=f_X(x)f_Y(x)$. 아울러, 두 랜덤변수의 상관성에 대한 문제는 상관함수 $E[XY]$를 이용하여 기술하는데, 상관함수는 두 랜덤변수 곱의 기댓값을 의미한다.

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (xy) f_{XY}(x, y)$$
$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x, y)$$
$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{7}$$

아울러, 결합분산(Covariance)과 상관계수도 식(7)와 같이 정의되며, 이들은 모두 두 랜덤변수 사이의 상관성을 기술하는데 이용되는 지표들이다.

고전 랜덤진동은 결정론적인 시스템에 가해진 랜덤입력에 대하여, 주어진 입력을 먼저 통계적인 방식으로 기술하고 이것으로부터 시스템 응답을 다시 통계적인 방식으로 기술하는 과정이라고 할 수 있다. 이것은 랜덤변수 들의 함수로 정의되는 특정 함수의 통계적인 특성화를 필요로 하게 된다. 한 랜덤실험을 수행할 때, 시간과 위치, 방향에 따라 여러가지 측정결과 혹은 관측에 따른 랜덤변수가 있을 수 있지만, 단지 두 개의 랜덤변수만으로 정의되는 함수 Z를 가정할 때, Z=g(X,Y)의 CDF는 X와 Y의 두 JPDF함수를, $g(x,y)<z$를 만족하는 x-y영역에 대하여 적분한 개념이다. PDF는 CDF와 적분변환의 관계를 가지므로, CDF의 z에 관한 순간변화율이 된다. 만일 두 랜덤변수의 합으로 구성된 함수 $Z=X+Y$의 CDF($x+y<z$에 관한)는 y 혹은 x에 대한 적분구간을 각각 x-z 혹은 y-z로 변경하여 얻을 수 있는데, CDF로부터 PDF를 계산하기 위해서는 Leibniz연산법칙을 적용할 수 있다[1]. 중요한 것은 독립인 두 확률변수 X와 Y의 합 함수 $Z(=X+Y)$의 PDF는 두 확률변수 사이의 PDF에 대한 convolution적분으로 정의된다는 것이다. 아울러, Z의 기댓값은 개별적인 두 확률변수의 기댓값의 합으로 표현되며, 특별히 Z의 분산은 각각의 분산의 합에 2배의 결합분산을 추가로 더하게 된다. 여기서 강조되어야 할 것은, 정규 분포하는 확률변수들의 합의 확률분포는 역시 정규분포를 따른 다는 것인데, 같은 맥락에서 중심극한원리(Central limit theorem)는 일반적인 분포특성을 갖는 독립 랜덤변수들의 합의 분포는 궁극적으로 정규분포에 수렴한다는 것을 의미한다.

2.3 랜덤프로세스

랜덤프로세스는 순서에 따라 정렬된 랜덤변수의 나열인데, 이 순서를 나타내는 독립변수는 indexing 집합에 속하게 된다. 파라미터란 시간과 같은 독립변수를 말하는데, 예를 들어 가속도는 시간에 따라 변화되는 랜덤 프로세스이며, 도로의 랜덤한 굴곡은 거리 혹은 위치에 따라 변화되는 랜덤 프로세스라 할 수 있다. 파라미터가 연속이면, 랜덤 프로세스는 $\{X(t),\ t \in T\}$로 표현되고, T는 indexing 집합이다. 마찬가지로, 독립변수가 이산변수이면, 랜덤프로세스는 $\{X_j,\ j \in J\}$로 표현되는데, 여기서 J는 이산 indexing 집합이 된다. 참고로, 랜덤프로세스는 낱개의 원소로 표현하면, $X(t_1)$, $X(t_2)$, ...$X(t_{n-1})$로 표현할 수 있으며, 이러한 각각의 random variable realization을 통해서 랜덤 프로세스를 그래프로 형상화할 수 있다. 중요한 것은 래덤프로세스의 특성을 기술하거나 표현하기 위해서는, 래덤 프로세스의 확률적인 특성을 완전히 기술해야 하는데, 이것은 하나의 랜덤 프로세스 안에 있는 모든 랜덤변수들에 대한 JPDF함수를 모두 정의 및 기술해야 하는 것이다. 즉, 이산 랜덤프로세스 $\{X_j,\ j \in J\}$의 경우, 임의의 랜덤변수 각각에 대한 PDF와 임의 두 랜덤변수 들 사이의 조합에 의한 bivariate JPDF와 계속해서 tri-variate, multi-variate JPDF까지 정의해야 한다는 것이 되지만, 임의 분포를 갖는 랜덤변수들 사이의 결합 PDF를 완전하게 정의하는 것은 현실적으로 불가능하다. 그러나, 특별히 제한 분포 특성을 갖는 랜덤프로세스의 경우는 전체적인 확률특성을 기술할 때, 랜덤

정보의 모든 것이 아닌 단지 부분적인 정보만으로도 그 특성을 완전하게 기술한 한 경우가 있는데, 랜덤 프로세스가 정규분포 특성을 가질 때가 바로 그 경우이다. 이 정규분포 특성을 랜덤프로세스는 평균과 분산, 상관함수 등의 2차 확률 모멘트 특성만으로 완전하게 통계적인 특성이 기술된다.

랜덤프로세스는 또한 랜덤측정결과의 앙상블(ensemble)로도 정의된다. 예를 들어, 랜덤하게 움직이는 동일한 대상을 일정시간 동안 반복해서 측정하게 되는 경우가 있고, 각각의 측정결과에 대한 시간이력을 조합하면, 랜덤 앙상블이 된다. Fig. 3은 하나의 랜덤한 소스로부터 일정한 시간간격동안 각각 다른 시간에서 반복 측정된 6개의 앙상블 원소의 예를 나타낸다.

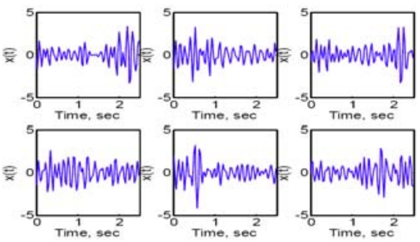

Fig. 3 Example of random ensemble

한편, 랜덤프로세스도 자신의 평균, 분산, 표준편차에 의해서 간략하게 확률적인 특성들이 기술될 수 있다. $\{X(t),\ t\in T\}$가 연속 파라미터 t에 대한 연속 랜덤 프로세스이고, 1차 PDF각 정의되었다고 가정하면, 랜덤 프로세스 X의 기댓값, 분산, 표준편차는 식(8)과 같이 동일하게 정의된다. 하나의 랜덤프로세스 안에서, 두 랜덤변수 사이의 상호관계 혹은 의존성을 아는 것이 중요하다. 이러한 관계를 규정하는 한 가지 방법이 자기상관함수(auto correlation)을 정의하는 것인데, 어느 한 랜덤프로세스 $\{X(t),\ t\in T\}$에서, 두 랜덤 샘플 조합 혹은 이 둘에 대한 상관관계(bivariate relation)는 식(8)과 같이, 두 랜덤변수의 곱의 기댓값으로 정의된다. 이 함수는 제한적인 의미에서, 두 랜덤변수 사이의 bivariate PDF의 특성을 나타내고 있다.

$$\begin{aligned} R_{XX}(t,s) &= E[X(t)X(s)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_1 x_2) f_{X(t)X(s)}(x_1,x_2) \qquad t,s\in T \end{aligned} \tag{8}$$

임의 두 시점에 대한 두 랜덤변수 realization 사이의 상관함수가 0에 근접하면, 두 랜덤변수가 상관성이 없다는 것이고, 상관함수가 크고 양의 값이면, 양의 강한 상관성을, 상관함수가 크고 음의 값이면, 음의 강한 상관성을 가짐을 의미하게 된다.

상관함수를 랜덤 앙상블의 관점에서 기술하면, 연속 랜덤프로세스 $\{X(t),\ t\in T\}$에 대하여, 많은 수의 샘플을 측정하여, $x_m(t),\ t\in T,\ m=1,2,...,M$로 쓰면, 이러한 각각의 realization에 대하여, $x_j(t)x_j(s)$를 계산하고, m개의 샘플에 대해서 평균을 취하면, 이 평균은 M이 증가됨에 따라, 자기상관함수 $R_{XX}(t,\ s)$에 수렴하게 된다. 아울러, 자기 결합 분산함수와 자기상관 계수 함수는 자기상관함수에 의해서 식(9)과 같다.

$$\begin{aligned} C_{XX}(t,s) &= E[(X(t)-\mu_X(t))(X(s)-\mu_X(s))] = R_{XX}(t,s)-\mu_X(t)\mu_X(s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_1-\mu_X(t))(x_2-\mu_X(s)) f_{X(t)X(s)}(x_1,x_2) \qquad t,s\in T \end{aligned}$$

$$\rho_{XX}(t,s) = \frac{C_{XX}(t,s)}{\sigma_X(t)\sigma_X(s)} \qquad t,s\in T \tag{9}$$

만약, 랜덤 프로세스의 평균이 상수 값을 갖고 자기상관함수가 시간차이(t-s)만의 함수로 표현되면, 이 랜덤프로세스를 약정상(weakly stationary)이라고 표현하는데, 이것은 통계적인 관점에서 랜덤변수가 정상상태의 조건로 수렴하고 있음을 나타내게 된다. 그러나 실제 문제의 경우, 상수 평균값을 갖거나, 자기상관함수가 시간차이 만의 함수로 유일하게 정의되는 경우가 없기 때문에, 약정상의 가정은 이상화에 가까운 랜덤특성의 단순화라고 할 수 있다.

랜덤 프로세스가 약정상일때, 전 주파수 구간에 대하여 포리에 변환하여, 식 (10)와 같은 스펙트럼 밀도함수를 정의할 수 있다. 식(9)의 역변환관계로부터 시간 차이 τ가 0인 경우, 정상 랜덤프로세스 스펙트럼 밀도함수의 전주파수 구간에 대한 적분값이 mean square값이 됨을 유도할 수 있다. 스펙트럼 밀도함수는 랜덤프로세스의 신호구성과 빈도가 어떻게 분포하는지를 나타낸다.

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad -\infty<\omega<\infty \tag{9}$$

여기서 중요한 것은 가우스 분포를 따르는 랜덤 프로세스의 합과 선형조합은 역시 가우스 랜덤 프로세스가 된다는 것이다. 이산 주기성분을 갖는 2면(two sided) 스펙트럼 밀도함수와 자기 상관함수, 그리고 이것에 대응되는 시간이력의 파형 사이에는 특별한 관계성을 갖게 되는데, 이것은 신호를 획득할 때 나타나게 된다.

특별히, 자기상관함수가 단위 impulse함수이고 스펙트럼 함수가 일정한 경우를 백색잡음 프로세스 $\{W(t),\ -\infty<t<\infty\}$라고 부른다. 백색잡음이란 무색광처럼 모든 주파수 성분을 갖는 파형을 의미하는 것이다.

자기상관함수는 하나의 랜덤프로세스에서 랜덤변수 조합의 관계를 규정하는 반면, 교차상관함수는 두 랜덤프로세스 안에서 확률변수 들의 조합 사이의 관계성을 규정하는 함수다. JPDF가 주어진 두 랜덤프로세스 $\{X(t),\ t\in T\}$와 $\{Y(t),\ t\in T\}$에 대해서, 교차상관함수는 식(11)로 정의된다.

$$R_{XY}(t,s)=E[X(t)Y(s)]=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy(xy)f_{X(t)Y(s)}(x,y) \tag{11}$$

두 랜덤프로세스가 약정상이면, 그 둘의 교차상관함수는 시간차이 $\tau(=t-s)$만의 함수가 되고, 포리에 변환관계에 의하여 교차 스펙트럼 밀도 함수를 갖는다. 이때, 상관도 스펙트럼함수(coherence)는 식(12)와 같이 정의 된다.

$$\gamma_{XY}^2(f)=\frac{|S_{XY}(f)|^2}{S_{XX}(f)S_{YY}(f)} \qquad -\infty<f<\infty \tag{12}$$

3. 선형계의 랜덤진동

3.1 선형 구조 동력학

선형계의 동적거동은 근사적으로 식(13)과 같은 선형 2계 상미분방정식으로 수학적 모형화될 수 있고, 이것으로부터 응답에 대한 해석적 해 또는 수치해를 구할 수 있다. 응답의 일반해는 초기 조건에 따른 해(과도해)와 하중입력에 따른 특별해(정상해)를 구성되며, 그 형태와 특성은 교과서에서 많이 보아왔다.

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=q/m \tag{13}$$

한편, 시스템 응답은 충격응답함수(IRF)를 이용하여 convolution 적분의 형태로 식(14)과 같이 표현된다. $h_{xq}(t)$는 $q(t)$가 Delta 함수 $\delta(t)$일 때, 단위 충격하중에 대한 시스템의 응답을 나타낸다.

$$x(t)=\int_0^t h_{xq}(t-\tau)q(\tau)d\tau \qquad t\ge 0 \tag{14}$$

식(13)은 양변을 포리에 변환하여 식(15)과 같이 주파수 공간 표현식으로 표현될 수 있는데, 식(15)로부터, 식(16)와 같은 주파수 응답함수(Frequency Response Function, FRF)를 정의하게 된다.

$$\left(-\omega^2m+i\omega c+k\right)X_0(\omega)=Q(\omega) \qquad -\infty<\omega<\infty \tag{15}$$

$$H_{xq}(\omega)=\left(-\omega^2m+i\omega c+k\right)^{-1} \qquad -\infty<\omega<\infty \tag{16}$$

식(14)도 포리에 변환하면, 식(15)와 동일한 주파수 공간 표현식을 얻게 되는데, 이 때문에 계의 주파수 응답함수는 IRF의 포리에 변환이 된다. 다 자유도 진동계의 경우는, 행렬방정식으로 표현되고, 주파수 응답함수는 자유도(n) 차원의 정방행렬이 된다. 결론적으로, 선형계의 동적응답은 시간영역과 주파수 영역에서 모두 표현가능하며, 이 둘은 정보의 손실 없이 완전하게 변환된다. 비감쇠 선형계의 모달해석은 다자유도 진동계의 연성된 운동방정식을 비연성된 다수의 1자유도 방정식으로 변환하여 분석하는데 이용된다[(2)].

3.2 선형계의 랜덤진동 이론

이제까지 선형 구조 동력학의 기초이론에서, 임의 가진력에 대한 응답은 충격응답함수와 임의 가진력의 convolution 적분으로 식 (14)와 같이 표현될 수 있었다. 여기서, 가진력이 랜덤하면, 응답은 랜덤 프로세스가 된다. 운동방정식을 입력 랜덤프로세스 $\{Q(t),\ t\ge 0\}$와 응답 랜덤프로세스 $\{X(t),\ t\ge 0\}$의 표현으로 다시 쓰면, 식 (17)이 된다.

$$X(t)=\int_0^t h_{xq}(t-\tau)Q(\tau)d\tau \qquad t\ge 0 \tag{17}$$

상기 식은 두 가지 직관적인 의미를 갖는데, 하나

는 입력 랜덤프로세스라는 것이 앙상블이고, 입력 앙상블의 각 element가 응답 앙상블의 개별 element인 response를 가진한다는 것과, 또 하나는 입력 랜덤 프로세스는 랜덤변수 $\{Q(t_1),\ Q(t_2),...,\ Q(t_n)\}$의 나열로 볼 수 있는데, 이것의 convolution 적분은 결국, 개별 요소들에 대한 리만합(Riemann sum)의 극한에 수렴한다는 의미가 된다. 이것은 식 (18)로 표현될 수 있다.

$$X(t)=\int_0^t h(t-\tau)Q(\tau)d\tau=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\tau_j\to 0}}\sum_{j=1}^{n} h(t-\tau_j)Q(\tau_j)\Delta\tau_j \qquad t\ge 0 \tag{18}$$

결국, 응답의 평균과 자기상관함수는 각각 식(19)와 식(20)과 같이 표현된다.

$$\mu_X(t)=\int_0^t h_{xq}(t-\tau)\mu_Q(\tau)d\tau \qquad t\ge 0 \qquad (19,\ 20)$$

$$R_{XX}(t,s)=\int_0^t d\tau\int_0^s d\gamma h_{xq}(t-\tau)h_{xq}(s-\gamma)R_{QQ}(\tau,\gamma) \qquad t,s\ge 0$$

식(20)에 의해서 입력이 약정상 프로세스이면, 응답의 자기 상관함수 역시 시간차이(혹은 시간지연)만의 함수가 되고, 따라서 응답도 약정상 프로세스가 된다. 식 (17)의 변수변환($t \leftrightarrow \tau$)을 수행하면, 식 (17)은 식 (21)이 된다.

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_{xq}(\tau)Q(t-\tau)d\tau \qquad -\infty<t<\infty \tag{21}$$

특정한 초기조건에 의해서 진동을 시작한 시스템이 어떤 일정한 시간에, 랜덤한 정상 가진력 장에 노출되면, 시스템 응답이 $(1-e^{-2\xi\omega t})$의 비율로 정상상태로 수렴하게 되는데, 이것은 응답의 수렴비율이 감쇠비에 따라 달라진다는 의미가 된다. 이처럼 랜덤 응답 프로세스가 정상상태에 도달하면, 스펙트럼 밀도함수를 갖게 되는데, 이것은 응답의 자기상관함수를 포리에 변환하여 식 (22)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &= H_{xq}^{*}(\omega)H_{xq}(\omega)S_{QQ}(\omega) \\ &= \left|H_{xq}(\omega)\right|^2 S_{QQ}(\omega) \qquad -\infty<\omega<\infty \end{aligned} \tag{22}$$

이것은 선형계 랜덤진동 이론의 최종적인 식으로, 랜덤 입력과 랜덤 응답간의 상관관계를 정의하고 있다. 즉, 응답의 스펙트럼 밀도함수는 주파수 응답함수의 modulus 제곱에 가진 스펙트럼 밀도함수를 곱한 것이다.

4. 결 론

랜덤이론은 하나의 랜덤변수에서 랜덤 프로세스로 확장되면서 통계적인 특성을 기술하였고, 랜덤이론과 선형계의 구조 동력학 이론을 결합하여, 선형계의 랜덤진동 이론, 즉 랜덤입력과 랜덤응답 사이의 상관 관계식을 유도하였다. 대부분의 교과서에서는 수학적인 도구만을 이용하여 이론전개 하지만, 궁극적인 목적은 구조 동력학과 유한요소법을 이용하여, 실제 구조물의 랜덤해석을 수행하는 방법론에 관한 것에 주목해야 한다[(3)]. 따라서, 상용코드 내부에서 랜덤진동 해석을 어떻게 수행하는지에 초점을 맞추어 학습하면 효과적일 것으로 생각된다.

참고문헌

(1) Wirsching, P. H., Paez, T. L., Ortiz, K., 1995, Random Vibrations, Dover Publications, USA.

(2) Inman, D. J., 1996, Engineering Vibration, Prentice Hall, USA.

(3) Newland, D. E., 1993, Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis, 3rd ed., Longman Group, UK.

후 기

이 논문은 교육과학기술부의 재원으로 시행하는 한국과학재단의 원자력기술개발사업으로 지원받았습니다(연구과제 관리코드: M20706020005-08M0602-00510). 교과서에 있는 내용이지만, 세삼스레 다시 언급코자 하는 이유는 사유와 이해의 방식에는 개인마다 차이가 있으며, 저자가 이해한 것에 대해 다른 이들의 비판을 듣기 위함이다. 졸작을 끝까지 읽어주신 분들께 감사드리며, 부족한 저자의 지식에 이해를 바란다.