

# 변위 가정법을 이용한 배관 시스템의 정상 상태 진동 해석 The steady-state vibration analysis of piping system by applying displacement assumption method

이성현\*·정의봉†

Seong Hyeon Lee and Weui Bong Jeong

**Key Words** : Harmonically pulsating fluid(조화 맥동 유체), Piping system(배관계), Steady-state time response(정상상태 시간 응답)

## ABSTRACT

The equation of motion for the piping system conveying harmonically pulsating fluid is presented. When pulsating fluid flows, the properties of this system like mass, stiffness and damp is changing according to fluid fluctuation. To solve the steady-state time response of this system, numerical integration method of differential equation was usually used. But this method has some problem such time consuming method and difficulty of converging. Therefore this research suggests reliable and efficient numerical method to solve steady-state time response of piping system by using displacement assumption method.

4<sup>th</sup> Runge-Kutta method와 비교하여 그 신뢰성 및 효율성을 검증하였다.

## 1. 서 론

맥동 유체가 흐르는 배관 시스템에 대한 연구는 많은 엔지니어 들에 의해 연구 되었다.[1-4] 배관 내부에 맥동 유체가 흐를 때 유체의 맥동에 의해 배관 시스템의 물성치(질량, 강성, 감쇠)가 영향을 받게 된다. 이러한 시스템의 시간 응답을 구하기 위해서는 대개 Runge-Kutta method와 같은 수치 기법들이 많이 사용되었다. 하지만, 이와 같은 방법들은 계산 시간이 많이 걸릴 뿐만 아니라 충분히 작은 적절한  $\Delta t$  를 선정하지 못하면 해석 결과가 발산하는 경우가 종종 있다. 이러한 배관 시스템에 있어서 조화 맥동 유체가 흐를 때 본 연구에서는 3차원 배관 시스템의 정상 상태 시간 응답 해석을 변위 가정법을 이용하여 계산하였다. 본 해석 결과는

## 2. 배관 시스템의 모델링

### 2.1 배관 시스템의 운동방정식

유체가 흐르는 배관 시스템의 횡방향 진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.[5,6]

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho_f AU^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\rho_f AU \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (\rho_f A + m) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

### 2.2 유한요소 정식화

앞절에서 유도한 운동 방정식의 수치해석을 위해 유한요소 방정식으로 변환하기 위해서 가중 잔차법을 적용하였다. 가중 잔차법중에서 유한요소법에 주로 사용되며, 가중함수와 시도함수가 동일하다고 가정하는 Galerkin method 를 적용하였고, 횡방향운동의인 식 (1) 경우에 대한 결과는 식 (2)와 같다.

† 교신저자; 정희원, 부산대학교  
E-mail : wbyeong@pusan.ac.kr  
Tel : 051-510-2337, Fax : 051-517-3805  
\* 부산대학교

$$\int_0^L \{ Ely'''' + \rho_f AU^2 y'' + 2\rho_f AU y' + (\rho_f A + m)\ddot{y} \} \delta y dx = 0 \quad (2)$$

편의상 ‘ ’ 와 ‘ · ’ 은 각각 변위에 대한 미분과 시간에 대한 미분을 나타낸다. 미분 차수를 낮추기 위해서 식 (2)에 대한 부분 적분을 시행하고, Fig. 2와 같은 한 요소에 대해서 식 (2)를 정리하면 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \int_{-a}^a y'' \cdot \delta y'' dx - \rho_f AU^2 \int_{-a}^a y' \cdot \delta y' dx + 2\rho_f AU \int_{-a}^a y' \cdot \delta y dx + (\rho_f A + m) \int_{-a}^a \ddot{y} \cdot \delta y dx = 0 \quad (3)$$

y를 굽힘에 대한 형상 함수의 형태로 나타내면 식 (4)와 같다.[7]

$$y = [N_b(\xi)] \{\bar{y}\}_e \quad (4)$$

여기서

$$\{\bar{y}\}_e^T = \{y_k(t) \ \theta_k(t) \ y_{k+1}(t) \ \theta_{k+1}(t)\} \quad (5)$$

$$[N_b(\xi)] = [N_{b,1}(\xi) \ N_{b,2}(\xi) \ N_{b,3}(\xi) \ N_{b,4}(\xi)] \quad (6)$$

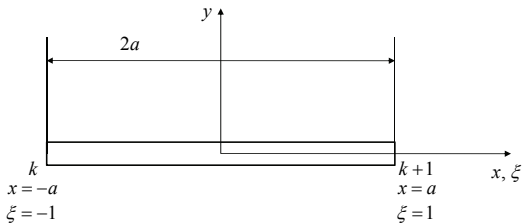


Fig. 2. Beam element of pipe

y와  $\theta$  는 각각 요소 끝단의 y변위와 z축에 대한 회전 각도를 나타낸다.

식 (4)를 이용하여 식 (3)을 정리하면 식 (7)과 같은 형태로 정리할 수 있다.

$$([M_e]_{p,b} + [M_e]_{f,b}) \{\ddot{y}(t)\} + [C_e]_{f,b} \{\dot{y}(t)\} + ([K_e]_{p,b} - [K_e]_{f,b}) \{y(t)\} = \{F\} \sin \omega_f t \quad (7)$$

여기서  $[M_e]_{p,b}$  는 배관요소의 횡방향 질량 성분,  $[M_e]_{f,b}$  는 유체요소의 횡방향 질량 성분,  $[C_e]_{f,b}$  는 유체요소의 횡방향 감쇠 영향,  $[K_e]_{p,b}$  는 배관 요소의 횡방향 강성 성분,  $[K_e]_{f,b}$  는 유체요소의 횡방향 강성 성분을 나타낸다.

### 2.3 변위 가정법

배관 내부로  $\omega_f$  로 맥동하는 유체가 평균 유속  $U_0$  와 맥동 유속 성분  $U_1$  으로 흐른다면 유속  $U$  는 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = U_0 + U_1 \sin(\omega_f t) = U_0 + U_1 \sin(2\pi f_f t) \quad (8)$$

식 (8)을 이용하여 횡방향 운동방정식을 다시 나타내면 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[M] \{\ddot{X}(t)\} + (1 + \varepsilon_u \sin(\omega_f t)) [C] \{\dot{X}(t)\} + \left( [K_s] - [K] \begin{pmatrix} 1 + 2\varepsilon_u \sin(\omega_f t) + \frac{1}{2} \varepsilon_u^2 \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_u^2 \cos(2\omega_f t) \end{pmatrix} \right) \{X(t)\} = \{F\} \sin \omega_f t \quad (9)$$

여기서

$$\{X(t)\} = \sum_{n=1}^N \{ \{A_n\} \cos(n\omega_f t) + \{B_n\} \sin(n\omega_f t) \} \quad (10)$$

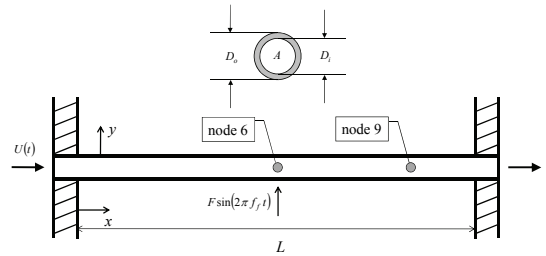


Fig. 3. Analysis model for pipe conveying pulsating fluid.

식 (9)의 자유도를 줄이기 위해서 식 (11)~(13)을 사용하여 모드 좌표로 변환하면 식 (14)가 된다.

$$\begin{aligned} \{X(t)\} &= [\phi] \{p(t)\} = \sum_{n=1}^N \{ \{A_n\} \cos(n\omega t) + \{B_n\} \sin(n\omega t) \} \\ &= [\phi] \sum_{n=1}^N \{ \{a_n\} \cos(n\omega t) + \{b_n\} \sin(n\omega t) \} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\{p(t)\} = \sum_{n=1}^N \{ \{a_n\} \cos(n\omega t) + \{b_n\} \sin(n\omega t) \} \quad (12)$$

$$\{A_n\} = [\phi] \{a_n\} \quad (13-1)$$

$$\{B_n\} = [\phi] \{b_n\} \quad (13-2)$$

$$\sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} [m] \begin{Bmatrix} -\{a_n\}(n\omega)^2 \cos(n\omega t) \\ -\{b_n\}(n\omega)^2 \sin(n\omega t) \end{Bmatrix} \\ + [c] \begin{Bmatrix} 1 + \varepsilon \sin(\omega t) \\ -\{a_n\}(n\omega) \sin(n\omega t) \\ + \{b_n\}(n\omega) \cos(n\omega t) \end{Bmatrix} \\ + \left( [k_s] - [k] \begin{Bmatrix} 1 + 2\varepsilon \sin(\omega t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos(2\omega t) \end{Bmatrix} \right) \\ \{ \{a_n\} \cos(n\omega t) + \{b_n\} \sin(n\omega t) \} \end{bmatrix} = \{f\} \sin \omega t \quad (14)$$

식 (14)에서 삼각 함수 항들을 Taylor' series 전개를 이용하여 전개한 뒤 양변의  $(\omega t)^n$  의 계수를 비교하면 식 (15)와 같은 연립 방정식을 유도할 수 있다.

$$[D]\{ab\} = \{force\} \quad (15)$$

여기서

$$[D] = \begin{bmatrix} L_{11} & \dots & L_{1N} & S_{11} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & \dots & S_{2N} & L_{21} & \dots & L_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{(N-1)1} & \dots & L_{(N-1)N} & S_{(N-1)1} & \dots & S_{(N-1)N} \\ S_{N1} & \dots & S_{NN} & L_{N1} & \dots & L_{NN} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad (16)$$

$$\{ab\} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N\}_{2N \times 1}^T \quad (17)$$

$$\{force\} = \left\{ 0 \ \frac{(-1)^{(l-1)}}{l!} \ \dots \ 0 \ \frac{(-1)^{(N-1)}}{(2N-1)!} \right\}_{1 \times 2N}^T \quad (18)$$

식 (15) 을 계산하면 식 (17)을 구할 수 있고, 결국 식 (10)의 변위  $\{X(t)\}$  를 구할 수 있다.

### 3. 해석

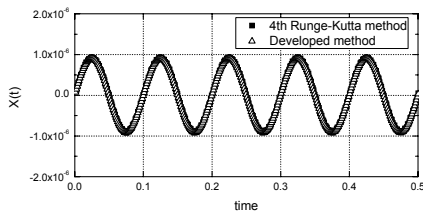


Fig. 5. The response of the displacement  $X(t)$  in time domain : 4<sup>th</sup> Runge-Kutta and Developed method.

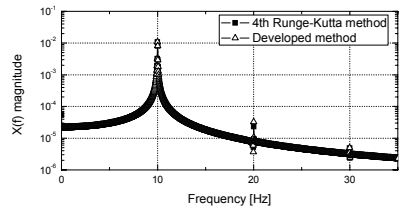


Fig. 6. The response of the displacement  $X(t)$  in frequency domain : 4<sup>th</sup> Runge-Kutta and Developed method.

개발된 방법의 Fig. 3 모델에 대한 해석 결과를 4<sup>th</sup> Runge-Kutta 법과 비교하여 보았다. Fig. 5는 두 결과의 시간 응답 결과를 나타내고, Fig. 6은 시간 응답 결과를 Fourier 변환한 결과이다. 해석 결과 두 값이 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

### 4. 결 론

본 연구에서는 조화 맥동 유체가 흐르는 배관 시스템이 맥동 주파수와 동일한 주파수의 조화 가진 하에 있을 때 정상상태 시간 응답을 구하는 효과적이며 신뢰할 만한 수치 기법을 제시하였다. 제시된 방법은 4<sup>th</sup> Runge-Kutta 법과 비교하여 계산 결과의 신뢰성과 효율성을 검증하였다.

### 참 고 문 헌

- (1) Païdoussis, M. P. and Issid, N. T., 1977, Dynamic stability of pipes conveying fluid, Journal of Sound and vibration, Vol. 33, pp. 267-294.
- (2) Païdoussis, M. P. and Issid, N. T., 1976, Experiments on Parametric Resonance of a Pipes Containing Pulsatile Flow, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 198-202.
- (3) Seo, Y. S., Jeong, W. B. and Yoo, W. S., 2005, Frequency response analysis of cylindrical shells conveying fluid using finite element method, Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 19, No. 2, pp 625-633.
- (4) Jeong, W. B., Seo, Y. S., Jeong, S. H., Lee, S. H. and Hong, C. S., 2006, Vibration

analysis of pipes considering fluid pulsation, Journal of KSNVE, Vol. 16, No. 10, pp 1050-1056.

(5) Païdoussis, M. P., 1998, Fluid-Structure Interactions; slender structures and axial flow Volume 1, Academic Press, New York, USA.

(6) Blevins, R. D., 1990, Flow-Induced Vibration, 2<sup>nd</sup> Ed. Van Nostrand Reinhold, New York, USA.

(7) Petyt, M., 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.