

자기장을 받는 복합재료 판의 동적 특성 연구

Dynamic Characteristics of Composite Plates Subjected to Electromagnetic Field

김성균* · 이근우* · 문제권* · 최중운** · 김영준*** · 박상윤*** · 송오섭†
Sung-Kyun Kim, Kune-Woo Lee, Jei-Kwon Moon, Jong-Woon Choi, Young-Jun Kim, Sang-Yun Park and Ohseop Song

Key Words : Composite Plate(복합재 평판), Dynamic Characteristics(동특성), Electromagnetic Field(자기장), Transverse Shear(횡전단), Extended Galerkin Method(확장된 Galerkin 방법)

ABSTRACT

Structural model of laminated composite plates based on the first order shear deformable plate theory and subjected to a combination of magnetic and thermal fields is developed. Coupled equations of motion are derived via Hamilton's principle on the basis of electromagnetic equations (Faraday, Ampere, Ohm, and Lorenz equations) and thermal equations which are involved in constitutive equations. In order to obtain the implications of a number of geometrical and physical features of the model, one special case is investigated, that is, free vibration of a composite plate immersed in a transversal magnetic field. Special coupling effects between the magnetic and elastic fields are revealed in this paper.

기 호 설 명

B, B₀, b : 자속밀도 벡터,
E, E₀, e : 전기 벡터,
H, H₀, h : 자계 벡터,
J, J₀, j : 전류밀도 벡터,
f : 로렌즈 힘 벡터,
V_i, v_i : 3D, 2D 변위 성분,
β₁, β₂ : 횡전단 변형률,
Θ : 온도,
ℓ₁, ℓ₂ : 평판의 길이, 폭
N_L : 복합재 층 개수,
ρ₀^(k) : k 번째 층의 복합재료 밀도,

2h : 평판 두께,
θ : 섬유각
τ : 무차원 시간,
z_k : 원점에서 k 번째 층의 바닥까지 거리,
μ₀ : 진공 속에서의 투자율,
φ, ψ : 미소변형 전기장의 e₁, e₂ 항
χ : 미소변형 자기장의 h₃ 항

$$M_0[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} / N_L$$

$$M_1[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1} + z_i) / (2N_L)$$

$$M_3[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2) / (3N_L)$$

$$M_4[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^4 + z_{i+1}^3z_i + z_{i+1}^2z_i^2 + z_{i+1}z_i^3 + z_i^4) / (5N_L)$$

1. 서 론

최근 복합재료는 높은 비강도 및 비강성, 내부식성, 우수한 피로수명, 낮은 열팽창률 등의 장점으로 인하여 항공우주분야뿐만 아니라 기계, 건축 및 원

† 교신저자; 충남대학교 기계공학과
 E-mail : songos@cnu.ac.kr
 Tel : (042)821-5650, Fax (042)822-5642
 * 한국원자력연구원
 ** 한화
 *** 충남대학교 대학원

자력 분야에서도 널리 적용되고 있다.

또한 최근 탄성-열-자기-전기 등의 상호 연성을 고려하여 설계해야 되는 구조물 형태가 출현하고 있으며 그 예로서 ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor)⁽¹⁾를 들 수 있다. ITER는 전세계 7개국이 공동으로 개발하고 있는 핵융합 실험로를 말한다. 핵융합로 내에서는 수소와 같은 가벼운 원자핵들을 플라즈마 상태에서 무거운 헬륨 원자핵으로 바꾸어 핵융합 반응을 일으킨다. 이때 노 내에서 수소 원자핵들이 반발력을 상실하고 상호 핵융합 반응을 일으키기 위해 플라즈마를 약 1억 °C까지 가열하며, 또한 가열된 플라즈마를 안정적으로 유지하기 위해 초전도 자석으로 플라즈마 주위에 자기장을 형성한다. 이와 같은 구조물은 탄성뿐만 아니라 탄성-열-자기-전기 등이 상호 연성된 구조물이라 할 수 있으며 이를 설계하기 위해서는 반드시 상호 연성을 고려해서 설계가 이루어져야 한다. 그러나 현재 이러한 탄성-열-자기-전기 등이 상호 연성된 구조물에 관한 연구⁽⁴⁻⁵⁾는 미진한 상태이다. 따라서 본 연구에서 복합재료 평판에 열 및 전자기장이 가해질 때의 일반적인 운동방정식 및 경계조건을 유도하였으며 수직방향의 자기장과 열하중이 가해지는 경우, 섬유각에 따른 복합재료 평판의 동적 특성을 고찰하였다.

2. 운동방정식

2.1 기초방정식

(1) 변위장 (Displacement field)

아래 Fig. 1과 같이 평판중심을 원점으로 하는 (x_1, x_2, x_3) 좌표계를 설정하고 섬유각은 x_3 축을 기준으로 설정하였다. 모델링을 위해 다음과 같은 운동학적 가정을 고려하였다.

- (a) 각 복합재료 층들은 서로 완전히 접촉되어 있으며 각 층의 두께는 모두 동일하다.
- (b) 복합재 평판의 두께는 평판의 넓이와 길이에 비해 상대적으로 매우 작다.
- (c) 횡전단변형을 고려한다.
- (d) 모든 변형은 선형으로 가정한다.
- (e) 회전 관성은 무시한다.

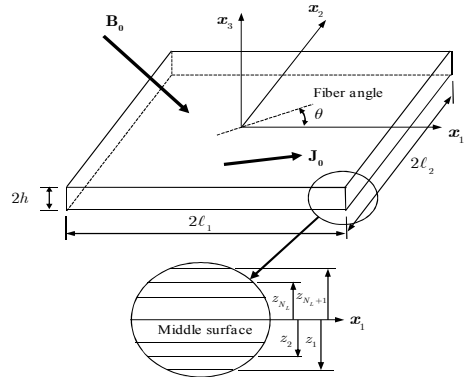


Fig. 1 Geometry of laminated composite plate

Fig. 2는 평판 단면의 변형 전 후의 형상을 나타내고 있다. 앞의 가정을 토대로 복합재 평판의 변위장을 다음과 같이 3D 변위 V_1, V_2, V_3 를 x_1, x_2, x_3 방향의 2D 변위 v_1, v_2, v_3 와 x_2, x_1 축 방향의 2D 회전각 β_1, β_2 로 나타낸다.

$$V_1(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_1(x_1, x_2, t) \quad (1a)$$

$$V_2(x_1, x_2, x_3, t) = v_2(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_2(x_1, x_2, t) \quad (1b)$$

$$V_3(x_1, x_2, x_3, t) = v_3(x_1, x_2, t) \quad (1c)$$

식(1)로부터 변형률을 구하면 다음과 같다.

$$\epsilon_{11} = v_{1,1} + x_3 \beta_{1,1} \quad (2a)$$

$$\epsilon_{22} = v_{2,2} + x_3 \beta_{2,2} \quad (2b)$$

$$\gamma_{12} = v_{1,2} + v_{2,1} + x_3 (\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) \quad (2c)$$

$$\gamma_{13} = \beta_1 + v_{3,1} \quad (2d)$$

$$\gamma_{23} = \beta_2 + v_{3,2} \quad (2e)$$

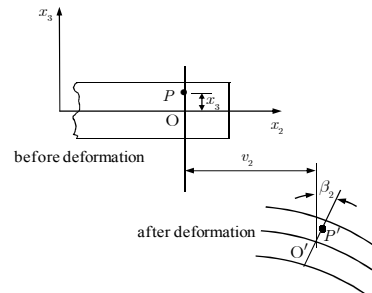


Fig. 2 Deformation variables for a rectangular plate

(2)전자기장(Electromagnetic field)

전기장 및 자기장 방정식은 일반화된 맥스웰 방정식으로부터 유도된다. 미소 변형된 전자기장에서의 맥스웰 방정식은 다음 식과 같이 쓸 수 있으며 전기장과 자기장은 식(3e)의 관계를 갖는다.

$$\text{페러데이 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3a)$$

$$\text{앙페르 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3b)$$

$$\text{오옴의 법칙} \quad \mathbf{J} = \mathbf{G}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) \quad (3c)$$

$$\text{로렌쯔 힘} \quad \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3d)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3e)$$

식(3c)에서 \mathbf{G} 는 전기전도행렬이며 다음과 같다.

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $g_{11} = g_1 \cos^2 \theta + g_2 \sin^2 \theta$, $g_{33} = g_3$,

$g_{22} = g_2 \cos^2 \theta + g_1 \sin^2 \theta$, $g_{12} = (g_1 - g_2) \sin \theta \cos \theta$

$g_i (i = 1, 2, 3)$ 은 섬유의 주방향 (principal direction) 전기전도율을 나타낸다.

평판이 미소 변형하고 전자기장이 선형으로 변형한다고 가정할 때, 전계, 자계 및 자속밀도는 다음과 같이 1차 및 섭동 자기장 (primary and disturbed electromagnetic field)로 구분하여 표현할 수 있다.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad (5)$$

여기서 \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{b} 는 각각 섭동 전계, 자계 및 자속 밀도 벡터를 나타내며 식(3)의 맥스웰 방정식을 동일하게 적용할 수 있다.

전계 벡터 $\mathbf{e}(x_1, x_2, x_3, t)$ 는 전계의 경계조건⁽³⁾을 대입하면 수평방향 전계 벡터 e_1, e_2 는 x_3 와 무관하게 된다. 또한 자계벡터 $\mathbf{h}(x_1, x_2, x_3, t)$ 에서 수직방향 자계벡터 h_3 는 자계의 경계조건⁽³⁾으로부터 x_3 와 무관한 함수로 정의할 수 있다. 따라서 e_1, e_2 와 h_3 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$e_1 \equiv e_1(x_1, x_2, t) \equiv \varphi(x_1, x_2, t) \quad (6a)$$

$$e_2 \equiv e_2(x_1, x_2, t) \equiv \psi(x_1, x_2, t) \quad (6b)$$

$$h_3 \equiv h_3(x_1, x_2, t) \equiv \chi(x_1, x_2, t) \quad (6c)$$

2.2 탄성-열-전기-자기 연성 운동방정식

(1) 구성방정식 (Constitutive equations)

복합재료에서 온도변화를 고려한 구성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} \\ \bar{\alpha}_{22} \\ \bar{\alpha}_{12} \end{bmatrix} \Theta \quad (7a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

여기서 $\bar{Q}_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ 를 환산탄성계수, $\bar{\alpha}_{\alpha\beta}$ 는 환산 열팽창계수이다.

(2) 운동방정식

식(1,2)와 식(7)을 아래의 Hamilton principle식에 대입하여 운동방정식을 유도한다.

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_0}^{t_1} [T - U + W_e] dt = 0 \quad (8)$$

@ $t = t_0, t = t_1$ 에서

$$\delta v_i = 0, \delta \beta_\alpha = 0 (i = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, 2)$$

여기서 T, U, W_e 는 각각 운동에너지, 탄성에너지, 외력을 나타내며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta T = \int_{\Omega} \int_{-h}^h \rho \dot{V}_i \delta \dot{V}_i d\Omega dx_3 \quad (9a)$$

$$\delta U = \int_{\Omega} \int_{-h}^h [S_{ij} \delta \epsilon_{ij}] d\Omega dx_3 \quad (9b)$$

$$\delta W_e = \int_{\tau} \rho H_i \delta V_i d\tau + \int_{\Omega} \sigma_i \delta V_i d\Omega \quad (9c)$$

여기서 H_i 는 체력(body force), σ_i 는 표면력(surface traction force)를 나타낸다.

Hamilton principle을 이용하여 유도한 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\delta v_1 : N_{11,1} + N_{12,2} - m_1 \ddot{v}_1 + \sigma_{13} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h f_1 dx_3 = 0 \quad (10a)$$

$$\delta v_2 : N_{21,1} + N_{22,2} - m_1 \ddot{v}_2 + \sigma_{23} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h f_2 dx_3 = 0 \quad (10b)$$

$$\delta v_3 : N_{31,1} + N_{32,2} + \sigma_{33} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h f_3 dx_3 - m_1 \ddot{v}_3 = 0 \quad (10c)$$

$$\delta \beta_1 : M_{11,1} + M_{12,2} - N_{13} - m_3 \ddot{\beta}_1 + h \sigma_{13} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h x_3 f_{31} dx_3 = 0 \quad (10d)$$

$$\delta \beta_2 : M_{21,1} + M_{22,2} - N_{23} - m_3 \ddot{\beta}_2 + h \sigma_{23} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h x_3 f_{32} dx_3 = 0 \quad (10e)$$

경계조건

$$@ x_1 = \pm \ell_1$$

$$\delta v_1 : (-N_{11} + \underline{N}_{11}) \delta v_1 = 0, \delta v_2 : (-N_{12} + \underline{N}_{12}) \delta v_2 = 0,$$

$$\delta v_3 : (-N_{13} + \underline{N}_{13}) \delta v_3 = 0,$$

$$\delta \beta_1 : (-M_{11} + \underline{M}_{11}) \delta \beta_1 = 0, \delta \beta_2 : (-M_{12} + \underline{M}_{12}) \delta \beta_2 = 0$$

$$@ x_2 = \pm \ell_2$$

$$\delta v_1 : (-N_{12} + \underline{N}_{12}) \delta v_1 = 0, \delta v_2 : (-N_{22} + \underline{N}_{22}) \delta v_2 = 0,$$

$$\delta v_3 : (-N_{23} + \underline{N}_{23}) \delta v_3 = 0,$$

$$\delta \beta_1 : (-M_{12} + \underline{M}_{12}) \delta \beta_1 = 0, \delta \beta_2 : (-M_{22} + \underline{M}_{22}) \delta \beta_2 = 0$$

식(10)에서 합응력과 합모멘트는 다음과 같다.

$$N_{\alpha\beta} \equiv \int_{-h}^h S_{\alpha\beta} dx_3, \quad N_{\alpha 3} \equiv \int_{-h}^h S_{\alpha 3} dx_3, \quad (11)$$

$$M_{\alpha\beta} \equiv \int_{-h}^h x_3 S_{\alpha\beta} dx_3, \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

식(10)에서 로렌즈 힘 f_i ($i = 1, 2, 3$) 와 로렌즈 힘을 정의하는데 필요한 유도전류 j_i ($i = 1, 2, 3$) 는 식(1) 과 식(4~6)을 맥스웰 방정식 (3)에 대입하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$f_1 = J_{02} B_{03} + J_{02} b_3 + (j_2 B_{03} - j_3 B_{02}) \quad (12a)$$

$$f_2 = -J_{01} B_{03} - J_{01} b_3 + (j_3 B_{01} - j_1 B_{03}) \quad (12b)$$

$$f_3 = (J_{01} B_{02} - J_{02} B_{01}) + (J_{01} b_2 - J_{02} b_1) + (j_1 B_{02} - j_2 B_{01}) \quad (12c)$$

$$j_1 = \left\{ g_{11}^{(i)} (\varphi + \dot{v}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^0) + g_{12}^{(i)} (\psi + \dot{v}_3 B_{01}^0 - \dot{v}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3 \left\{ g_{11}^{(i)} (\dot{v}_2 B_{03}^1 + \dot{\beta}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^1) + g_{12}^{(i)} (\dot{v}_3 B_{01}^1 - \dot{v}_1 B_{03}^1 - \dot{\beta}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3^2 \left\{ g_{11}^{(i)} \dot{\beta}_2 - g_{12}^{(i)} \dot{\beta}_1 \right\} B_{03}^1 \quad (13a)$$

$$j_2 = \left\{ g_{12}^{(i)} (\varphi + \dot{v}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^0) + g_{22}^{(i)} (\psi + \dot{v}_3 B_{01}^0 - \dot{v}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3 \left\{ g_{12}^{(i)} (\dot{v}_2 B_{03}^1 + \dot{\beta}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^1) + g_{22}^{(i)} (\dot{v}_3 B_{01}^1 - \dot{v}_1 B_{03}^1 - \dot{\beta}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3^2 \left\{ g_{12}^{(i)} \dot{\beta}_2 - g_{22}^{(i)} \dot{\beta}_1 \right\} B_{03}^1 \quad (13b)$$

식(12)와 식(13)을 평판의 두께에 대해 적분하고 식(10)의 로렌즈 힘에 의한 합응력과 합모멘트 식을 유도하면 다음과 같다.

$$\int_{-h}^h f_1 dx_3 = 2h J_{02} B_{03}^0 + 2h J_{02} \mu_0 \chi + B_{03}^0 \int_{-h}^h j_2 dx_3 + B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3 j_2 dx_3 - B_{02}^0 \int_{-h}^h j_3 dx_3 - B_{02}^1 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 \quad (14a)$$

$$\int_{-h}^h f_2 dx_3 = -2h J_{01} B_{03}^0 - 2h J_{01} \mu_0 \chi + B_{01}^0 \int_{-h}^h j_3 dx_3 - B_{03}^0 \int_{-h}^h j_1 dx_3 + B_{01}^1 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 - B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3 j_1 dx_3 \quad (14b)$$

$$\int_{-h}^h x_3 f_1 dx_3 = \frac{2h^3}{3} J_{02} B_{03}^1 + B_{03}^0 \int_{-h}^h x_3 j_2 dx_3 + B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_2 dx_3 - B_{02}^0 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 - B_{02}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_3 dx_3 \quad (14c)$$

$$\int_{-h}^h x_3 f_2 dx_3 = -\frac{2h^3}{3} J_{01} B_{03}^1 + B_{01}^0 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 + B_{01}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_3 dx_3 - B_{03}^0 \int_{-h}^h x_3 j_1 dx_3 - B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_1 dx_3 \quad (14d)$$

2.3 자기장이 수직으로 작용할 때 운동방정식

(1) 운동방정식

본 연구에서는 수치예제로서 평판의 모든 끝단이 단순지지 조건이고, 평판에 수직방향으로 자기장이 작용할 때 평판의 자유진동해석을 수행하였으며, 해

식에서는 굽힘변위와 횡전단 변위의 연성만 고려하였다. 자기장이 수직으로 작용할 때의 운동방정식과 경계조건을 변위의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta v_3 : & A_{45}(\beta_{2,1} + v_{3,12}) + A_{55}(\beta_{1,1} + v_{3,11}) \\ & + A_{44}(\beta_{2,2} + v_{3,22}) + A_{45}(\beta_{1,2} + v_{3,12}) \\ & - A_{11}^\alpha \Theta v_{3,11} - 2A_{12}^\alpha \Theta v_{3,12} - A_{22}^\alpha \Theta v_{3,22} - I_0 \ddot{v}_3 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \delta \beta_1 : & D_{11}\beta_{1,11} + D_{12}\beta_{2,12} + D_{16}(\beta_{1,12} + \beta_{2,11}) \\ & + D_{16}\beta_{1,12} + D_{26}\beta_{2,22} + D_{66}(\beta_{1,22} + \beta_{2,12}) \\ & - A_{45}(\beta_2 + v_{3,2}) - A_{55}(\beta_1 + v_{3,1}) - I_2 \ddot{\beta}_1 \\ & + (B_{03}^0)^2 C_{12}^g \dot{\beta}_2 - (B_{03}^0)^2 C_{22}^g \dot{\beta}_1 = 0 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \delta \beta_2 : & D_{16}\beta_{1,11} + D_{26}\beta_{2,12} + D_{66}(\beta_{1,12} + \beta_{2,11}) \\ & + D_{21}\beta_{1,12} + D_{22}\beta_{2,22} + D_{26}(\beta_{1,22} + \beta_{2,12}) \\ & - A_{44}(\beta_2 + v_{3,2}) - A_{45}(\beta_1 + v_{3,1}) - I_2 \ddot{\beta}_2 \\ & - (B_{03}^0)^2 C_{11}^g \dot{\beta}_2 + (B_{03}^0)^2 C_{12}^g \dot{\beta}_1 = 0 \end{aligned} \quad (15c)$$

경계조건

$$\begin{aligned} @x_1 = \pm \ell_1, \\ \delta v_3 : v_3 = 0 \\ \delta \beta_1 : D_{11}\beta_{1,1} + D_{12}\beta_{2,2} + D_{16}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) = 0 \\ \delta \beta_2 : \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} @x_2 = \pm \ell_2 \\ \delta v_3 : v_3 = 0 \\ \delta \beta_1 : \beta_1 = 0 \\ \delta \beta_2 : D_{16}\beta_{1,1} + D_{26}\beta_{2,2} + D_{66}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) = 0 \end{aligned}$$

여기서 $C_{\alpha\beta}^g \equiv 2h\mathbf{M}_2[g_{\alpha\beta}]$, $\bar{g}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{M}_0[g_{\alpha\beta}]$, $(\alpha, \beta) = 1, 2$

(2) 진동방정식

앞에서 유도한 운동방정식을 무차원화하기 위해 아래와 같은 무차원변수를 사용하였다. 또한 식(17)은 경계조건을 만족하는 무차원 변위 근사함수를 나타내며, 확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식(17)을 Hamilton식에 대입하여 식(18)과 같은 이산화된 운동방정식을 유도하였다.

$$\begin{aligned} \xi_1 \equiv x_1/\ell_1, \xi_2 \equiv x_2/\ell_2, \tau \equiv t\sqrt{\frac{D_{11}}{I_0\ell_1^4}}, \\ \bar{v}_3 \equiv v_3/h, \bar{\Theta} = \frac{\Theta\alpha_0\ell_1^2}{h^2}, \bar{B}_{03}^0 = B_{03}^0\sqrt{\frac{g_0h}{\rho_0E_0}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 = \Psi_v^T(\xi_1, \xi_2)\mathbf{q}_v(\tau), \bar{\beta}_1 = \Psi_{\beta_1}^T(\xi_1, \xi_2)\mathbf{q}_{\beta_1}(\tau), \\ \bar{\beta}_2 = \Psi_{\beta_2}^T(\xi_1, \xi_2)\mathbf{q}_{\beta_2}(\tau) \end{aligned} \quad (17)$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (18)$$

식(18)을 상태방정식으로 다음과 같이 변환하였다.

$$[\mathbf{M}]^*\{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{K}]^*\{\boldsymbol{\eta}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (19)$$

$$\text{여기서 } [\mathbf{M}]^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, [\mathbf{K}]^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

식(19)의 $\boldsymbol{\eta}$ 를 다음과 같이 변수분리한다.

$$\boldsymbol{\eta} = e^{\lambda\tau}\mathbf{Z} \quad (20)$$

여기서 λ 는 복소수 고유치이고, \mathbf{Z} 는 모드형상을 나타내는 벡터이다. 식(20)을 식(19)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda[\mathbf{M}]^*\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{K}]^*\{\mathbf{Z}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (21)$$

3. 수치해석

수치해석에 사용한 물성변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1/E_0 = 10, E_2/E_0 = 5, G_{12}/E_0 = 4, \\ G_{13}/E_0 = 2, \mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{13} = 0.25, \alpha_1/\alpha_0 = 0.1, \\ \alpha_2/\alpha_0 = 2, \alpha_3/\alpha_0 = 1, E_0 = 10^{10} \text{ N/m}^2, \alpha_0 = 10^{-3}, \\ g_0 = 10^8 \text{ S/m}^3. \end{aligned}$$

Table 1은 본 연구에서 수행한 해석결과의 검증에 위해 참고문헌[6]의 해석결과와 상호 비교하였다. 표에서 보는 바와 같이 FSDT 모델의 경우 최대오차가 0.2%를 넘지 않는 것을 알 수 있으며 이를 통해 본 연구의 해석결과가 신뢰성 있는 해석결과임을 확인하였다.

Fig. 1은 자기장 세기 및 온도의 변화에 따른 복합재 평판의 고유진동수 변화를 나타내고 있다. 그림에서 자기장의 세기가 커질수록 평판의 감쇠계수가 급격히 증가하고, 고유진동수는 점차 감소하는 것을 알 수 있다. 이는 식(15)에서 자기장의 세기가 커질수록 운동방정식의 감쇠 행렬

값이 증가하게 되므로 평판의 고유진동수가 점차 감소하게 된다. 또한 온도가 증가하면 고유진동수가 감소하고, 온도가 감소하면 고유진동수는 증가하는 경향을 나타내게 되는데 이는 식(15a)에서 온도의 증가 및 감소에 따라 구조강성이 감소하거나 증가되므로 온도가 고유진동수에 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

Fig. 2는 적층각과 자기장의 변화에 따른 복합재 평판의 고유진동수 변화를 나타내고 있다. 적층각 [30/-30/30]s 일 때가 [90/45/0]s 일 때 보다 자기장에 더 민감하게 영향을 받는 것을 알 수 있으며, 동일 적층각에서도 온도 변화에 따라 고유진동수 변화가 매우 크게 발생함을 알 수 있다.

Table 1 Comparison of the natural frequencies [rad/s] between present model and reference [6] ([0/90/0]; $E_1=2.5E_2$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $\nu_{12}=0.25$)

mode	Present		Reddy[6]	Error (%)	Present		Reddy[6]	Error (%)
	m	n	CPT		FSDT	FSDT		
1	1	280.667	280.076	0.211	279.778	279.304	0.170	
1	2	421.606	420.712	0.211	420.547	419.774	0.184	
1	3	742.523	740.942	0.213	740.290	738.845	0.195	
2	1	1048.346	1046.107	0.213	1034.612	1034.096	0.050	
2	2	1122.398	1119.993	0.214	1108.381	1107.835	0.049	

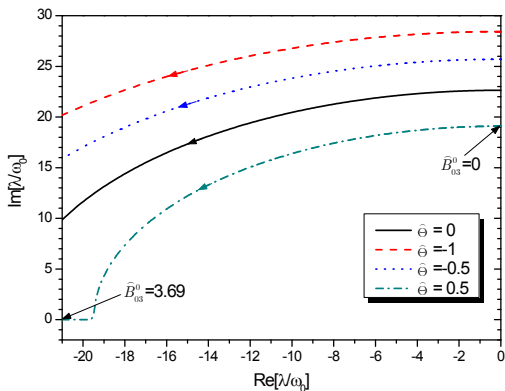


Fig. 1 Root loci of natural frequencies as magnetic field intensity \bar{B}_{03}^0 changes from 0 to 2.7 ([90/45/0]_s, $h/\ell_1 = 1/50$, $g_1/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_3/g_0 = 3.0$)

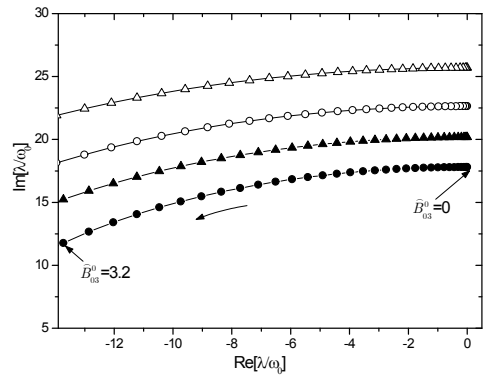


Fig. 2 Root loci of natural frequencies as magnetic field intensity \bar{B}_{03}^0 , temperature, and fiber angles changes

($h/\ell_1 = 1/50$, $g_1/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_3/g_0 = 3.0$, $-\circ-\circ, \Theta = 0, [90/45/0]_s$; $-\triangle-, \Theta = -1, [90/45/0]_s$, $-\bullet-\bullet, \Theta = 0, [30/-30/30]_s$; $-\blacktriangle-, \Theta = -1, [30/-30/30]_s$)

Figs. 3-5는 두께비 h/ℓ_1 의 변화에 따른 TS 모델 (transverse shearable model)과 NTS 모델(non-transverse shearable model)의 진동특성 변화를 나타내고 있다. 그림에서 $h/\ell_1 = 1/50$ 에서는 자기장의 세기가 증가할 때 횡전단변형이 고유진동수 및 감쇠계수에 큰 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

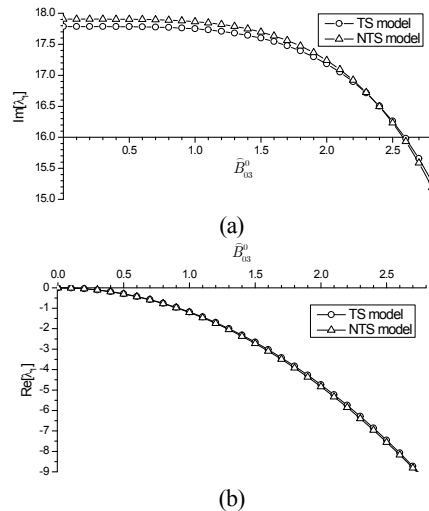


Fig. 3 Comparison of fundamental eigenvalues λ_1 for TS and NTS models ($h/\ell_1 = 1/50$, $g_1/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_3/g_0 = 3.0$) (a) $\text{Im}[\lambda_1]$ vs. \bar{B}_{03}^0 ; (b) $\text{Re}[\lambda_1]$ vs. \bar{B}_{03}^0 .

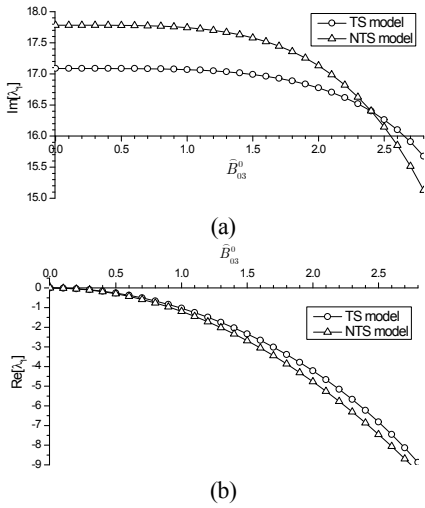


Fig. 4 Comparison of fundamental eigenvalues λ_1 for TS and NTS models ($h/\ell_1 = 1/20$, $g_1/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_3/g_0 = 3.0$) (a) $\text{Im}[\lambda_1]$ vs. \widehat{B}_{03}^0 ; (b) $\text{Re}[\lambda_1]$ vs. \widehat{B}_{03}^0 .

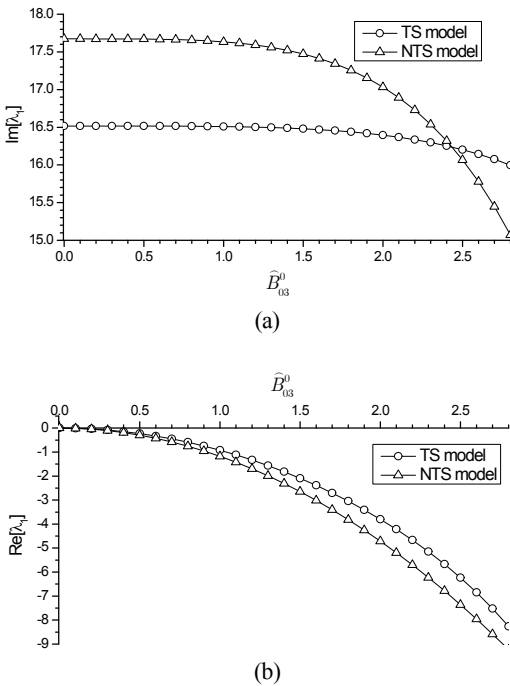


Fig. 5 Comparison of fundamental eigenvalues λ_1 for TS and NTS models ($h/\ell_1 = 1/15$, $g_1/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_3/g_0 = 3.0$) (a) $\text{Im}[\lambda_1]$ vs. \widehat{B}_{03}^0 ; (b) $\text{Re}[\lambda_1]$ vs. \widehat{B}_{03}^0 .

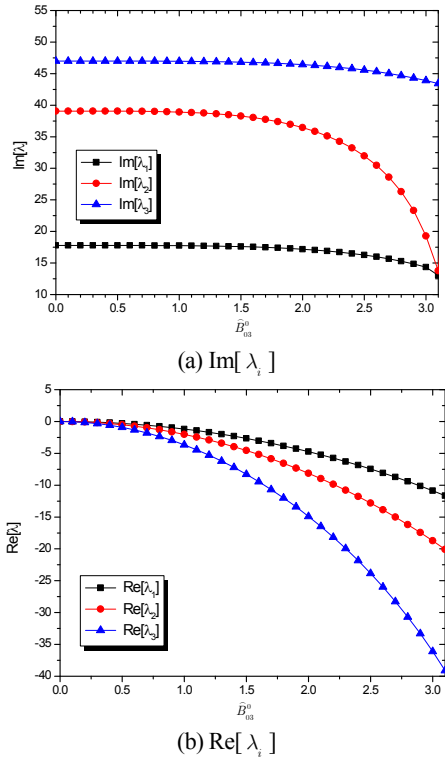


Fig. 6 Variation of natural frequency and damping with \widehat{B}_{03}^0 ($h/\ell_1 = 1/50$, $g_1/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_3/g_0 = 3.0$, $g_0 = 10^8 \text{ S/m}^3$)

그러나 h/ℓ_1 비가 증가할수록 TS와 NTS 모델의 경과에 큰 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 특히 $h/\ell_1 = 15$ 이고 자기장의 세기가 0과 2.8일때를 비교해 보면 TS모델은 16.5에서 15.9로 3.1% 감소한 반면 NTS모델은 17.6에서 15로 14.7%가 감소하였다. 이 결과를 통해 자기장을 받는 복합재 평판 해석 시 횡진단 효과를 반드시 고려해야 함을 알 수 있다.

Fig. 6은 자기장의 세기의 변화에 따른 1~3차 고유진동수 및 감쇠계수 변화를 나타내고 있다. 그림에서 자기장의 세기가 증가함에 따라 1차와 3차 고유진동수는 비슷한 비율로 감소하는 반면 2차 고유진동수는 자기장의 세기가 2~3 사이에서 급격하게 감소하는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 $(\theta / -\theta)_{\theta}$ 로 적층되었을 때 섬유각 θ 의 변화에 따른 평판의 고유진동수 변화를 살펴보고 있다.

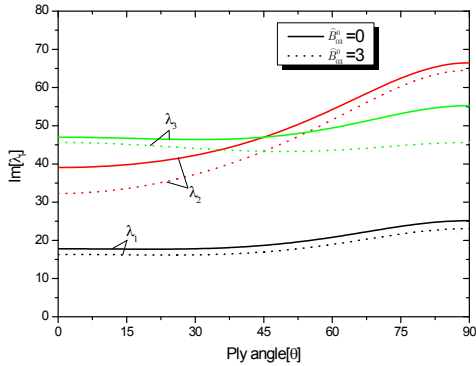


Fig. 7 Variation of natural frequencies with stacking sequence ($[\theta / -\theta / \theta]_s$, $h/\ell_1 = 1/50$, $g_1/g_0 = 3.0$, $g_2/g_0 = 1.1$, $g_3/g_0 = 3.0$, $g_0 = 10^8 \text{ S/m}^3$)

그림에서 1차 고유진동수는 자기장의 유무에 대해 큰 차이가 발생하지 않는 것을 알 수 있다. 그러나 2차 고유진동수는 섬유각이 $\theta = 0^\circ$ 부근에서 자기장의 유무에 따라 큰 차이를 보이다가 섬유각이 $\theta = 90^\circ$ 부근으로 갈수록 자기장의 영향이 점차 약화되는 것을 알 수 있다. 또한 3차 고유진동수의 경우에는 2차 고유진동수와 반대의 경향이 나타남을 알 수 있다. 즉 섬유각이 $\theta = 0^\circ$ 부근에서 자기장의 유무에 대해 큰 차이가 발생하지 않는 반면, 섬유각이 $\theta = 90^\circ$ 부근으로 갈수록 자기장의 유무에 따라 매우 큰 차이가 발생함을 알 수 있다.

3. 결 론

본 연구에서는 탄성-열-자기-전기가 서로 연성된 복합재료 평판의 운동방정식과 경계조건을 유도하였고, 수치예제로 수직방향으로 자기장을 받는 평판에 대해 전단변형 효과를 고려한 운동방정식과 경계조건을 유도하였다. 유도한 운동방정식을 extended Galerkin 방법을 이용하여 수치해석을 수행하였으며 자기장 변화, 온도 변화에 따른 고유진동수 및 감쇠계수의 변화를 고찰하였다. 해석결과를 통해 자기장의 세기가 증가할수록 평판의 감쇠력을 증가시킬 수 있었으며 이에 따라 고유진동수는 감소하는 것을 알 수 있었다. 또한 온도의 증감에 따라 고유진동수가 크게 차이가 나는 것을 알 수 있는데 이는 온도가 복합재 평판의 구조강성을 약화시킴으로써 발생하는 현상임을 알 수 있었다.

본 연구 결과는 탄성-열-자기-전기 등이 상호 연성된 구조물의 해석 시 매우 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

- (1) www.iter.org; www.nfri.re.kr
- (2) Kim, S.Y., 2001, Engineering electromagnetics, Scitech, Seoul.
- (3) Kim, S.K., Yoo, H.H., 2001, Vibration Analysis of Rotating Composite Cantilever Plates, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 407~413.
- (4) Davresh Hasanyan, Liviu Libresu, Zhanming Qin, Damodar R. Ambur, 2005, Magneto-thermo-elastokinetics of Geometrically Nonlinear Laminated Composite Plates. Part 1: Foundation of the Theory, Journal of Sound and Vibration, pp. 153-175.
- (5) Zhanming Qin, Davresh Hasanyan, Liviu Libresu, and Damodar R. Ambur, 2005, Magneto-thermo-elastokinetics of Geometrically Nonlinear Laminated Composite Plates. Part 2: Vibration and Wave Propagation, Journal of Sound and Vibration, pp. 177-201.
- (6) Reddy, J.N., 2004, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis 2nd Edition, CRC Press, New York.

후 기

이 논문은 2010년도 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 일반연구지원사업 (기본연구) 으로부터 지원을 받아 수행되었습니다. (과제번호 20100024485)