

# 전달행렬법을 이용하여 회전관성을 고려한 Expansion Joint의 진동해석

## Vibration Analysis of Expansion Joint with Rotary Inertia Using Transfer Matrix Method

신동호\* · 오재응\*\* · 이정윤†

Dong Ho Shin, Jae-Eung Oh and Jung Youn Lee

**Key Words :** Bellows(벨로우즈), Transfer Matrix Method(전달행렬법), Expansion Joint(신축 이음)

### ABSTRACT

Simplified formulae for axial and bending natural frequencies of bellows are developed using an equivalent thin-walled pipe model. The axial and bending stiffness of bellows is determined using lumped transfer matrix method. Accordingly, the Expansion Joint Manufacturers Association (EJMA) formula for axial and bending stiffness calculation is modified using two different equivalent radii. The results from the simplified formulae are verified by those from a experiment result and a finite element (FE) model and good agreement is shown between the each other.

### 1. 서 론

벨로우즈는 산업 전반의 배관시스템과 자동차 배기시스템 등에서 많이 사용되며, 진동 및 소음 등을 저감시키는 역할을 한다. 벨로우즈의 형태는 U형, Ω형, S형 등이 있으며, 특히 U형은 자동차 배기시스템에서 많이 사용되고 있다.

벨로우즈는 EJMA<sup>(1)</sup> (Expansion Joint Manufacturers Association)의 공식을 바탕으로 동특성 해석을 하고 있으며, 이것에 관한 연구도 진행되고 있다. 현재까지의 연구는 종진동에 관한 연구가 많이 이루어졌고, 좀 더 간단한 식<sup>(2)</sup>으로 종강성을 구할 수 있게 되었다. 횡진동에 대한 연구는 실험을 바탕으로 횡강성을 구하거나 또는 보로 등

가 계산하여 산출하였다. 지금 까지 연구결과 종강성은 EJMA의 공식<sup>(1)</sup>으로 계산한 결과와 거의 일치하였으나, 횡강성은 차이가 있었다.

본 연구에서는 횡강성의 차이를 규명하고 회전관성을 고려하여 보로 등가해석을 수행한다.

### 2. 이 론

#### 2.1 전달행렬법

(1) 2차원 전달행렬

보의 전달행렬<sup>(3)</sup>은 점 n-1, n사이에서 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\{Z\}_n = \{B\}_n \{Z\}_{n-1} \quad (1)$$

$\{B\}_n$ 와  $\{Z\}_n$ 은 n번째 전달행렬과 상대벡터를 나타내며 (2)식과 같다.

† 교신저자; 경기대학교 기계시스템공학과  
E-mail : jylee@kgu.ac.kr  
Tel : 031-249-9811 , Fax :031-244-6300

\* 경기대학교 대학원 기계공학과

\*\* 한양대학교 기계공학부

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix} \quad (2) \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J & 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

벨로우즈를 전달행렬법으로 해석하기 위하여 Fig. 1과 같이 모델링을 한다. Fig. 1(a)에서 축방향 전달행렬은

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이고 질량  $m$ 에 대한 점전달행렬은

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

이다. 따라서 벨로우즈 1개 요소에 2개의 스프링과 1개의 점질량이 있으므로 축방향 전달행렬은 (3)식과 (4)식을 조합하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} 1 - \frac{\omega^2 m}{k} & \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\omega^2 m}{k}\right) \\ -\omega^2 m & 1 - \frac{\omega^2 m}{k} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Fig. 1(b)에서 스패의 전달행렬은

$$\begin{Bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

이고, 질량  $m$ 과 회전관성  $J$ 에 대한 점전달행렬은 (7)식과 같다.

따라서 (3)식과 (4)식을 조합하면 벨로우즈 1개 요소에 대한 횡방향 전달행렬은 (8)식과 같다.

$$\begin{Bmatrix} 1 + \omega^2 m \frac{L^3}{6EI} & 2L - \frac{\omega^2 L^2}{2EI} \left(J - \frac{mL^2}{3}\right) & \frac{2L^2}{EI} - \frac{\omega^2 L^2}{2EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{6}\right) & -\frac{4L^3}{3EI} + \frac{\omega^2 L^3}{4EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{9}\right) \\ \omega^2 m \frac{L^2}{2EI} & 1 - \frac{\omega^2 L}{EI} \left(J - \frac{mL^2}{2}\right) & \frac{2L}{EI} - \frac{\omega^2 L^2}{EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{4}\right) & -\frac{2L^2}{EI} + \frac{\omega^2 L^2}{2EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{6}\right) \\ \omega^2 mL & -\omega^2 (J - mL^2) & 1 - \frac{\omega^2 L}{EI} \left(J - \frac{mL^2}{2}\right) & -2L + \frac{\omega^2 L^2}{2EI} \left(J - \frac{mL^2}{3}\right) \\ -\omega^2 m & -\omega^2 mL & -\omega^2 m \frac{L^2}{2EI} & 1 + \omega^2 m \frac{L^3}{6EI} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

축방향 전달행렬과 횡방향 전달행렬을 조합하면 (9)식과 같은 전달행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} 1 - \omega^2 \frac{m}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \omega^2 \frac{m}{k}\right) \\ 0 & 1 + \omega^2 m \frac{L^3}{6EI} & 2L - \frac{\omega^2 L^2}{2EI} \left(J - \frac{mL^2}{3}\right) & \frac{2L^2}{EI} - \frac{\omega^2 L^2}{2EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{6}\right) & -\frac{4L^3}{3EI} + \frac{\omega^2 L^3}{4EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{9}\right) & 0 \\ 0 & \omega^2 m \frac{L^2}{2EI} & 1 - \frac{\omega^2 L}{EI} \left(J - \frac{mL^2}{2}\right) & \frac{2L}{EI} - \frac{\omega^2 L^2}{EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{4}\right) & -\frac{2L^2}{EI} + \frac{\omega^2 L^2}{2EI^2} \left(J - \frac{mL^2}{6}\right) & 0 \\ 0 & \omega^2 mL & -\omega^2 (J - mL^2) & 1 - \frac{\omega^2 L}{EI} \left(J - \frac{mL^2}{2}\right) & -2L + \frac{\omega^2 L^2}{2EI} \left(J - \frac{mL^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & -\omega^2 m & -\omega^2 mL & -\omega^2 m \frac{L^2}{2EI} & 1 + \omega^2 m \frac{L^3}{6EI} & 0 \\ -\omega^2 m & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \omega^2 \frac{m}{k} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

각 요소의 상태벡터는 구조물의 경계조건<sup>(4)</sup>은 Fix-Fix인 경우 (10)식과 같다.

$$Z_1 = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad Z_{final} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix} \quad (10)$$

구조물은 Fig. 3과 같은 전달행렬의 결합으로 표시할 수 있고 각 요소의 상태벡터는

$$Z_{final} = [H]Z_1 \quad (11)$$

여기서,

$$H = B_1 B_2 B_3 \cdots B_{final}$$

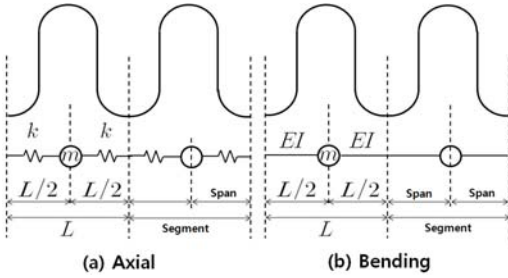


Fig. 1 Structure of the bellows stiffness

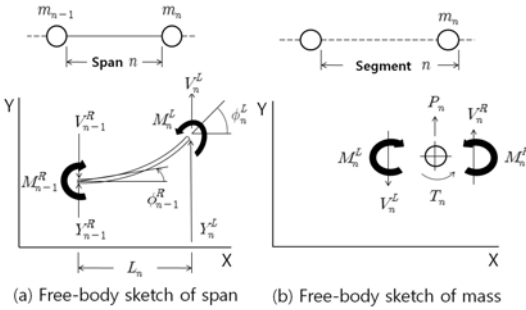


Fig. 2 Transfer matrix of beam

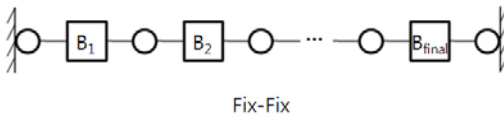


Fig. 3 Model for transfer matrix method

(11)식에 (9), (10)식을 대입하여 정리하고 고유진동수에 대한 n차 방정식을 구하면 Fix-Fix인 경우

$$\omega = \begin{vmatrix} H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{34} & H_{35} & H_{36} \end{vmatrix} \quad (12)$$

이다. 이 방정식의 n개의 해를 고유진동수라 하며, i차모드에 대한 고유벡터는 다음과 같다.

$$[\phi]_i = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_n \end{bmatrix}_i^T \quad (13)$$

## 2.2 벨로우즈 형상

(1) 벨로우즈의 등가 보 모델

벨로우즈의 1개 요소의 형상은 Fig. 4(a)와 같으며 단면 형상은 Fig. 4(b)와 같다. 벨로우즈의 전체 길이는 다음과 같다.

$$L = 2(R_r + R_c)n \quad (14)$$

벨로우즈는 Fig. 5와 같이 얇은 두께의 보로 등가모델링 할 수 있다. 재료물성치와 보의 두께는 벨로우즈와 동일한 값을 가지도록 한다. 벨로우즈의 단위길이당 질량은 다음과 같은 식<sup>(5)</sup>을 이용하여 구한다.

$$m = \frac{\rho 2 \pi R_m [\pi(R_c + R_r) + 2(h - (R_r - R_c))s]}{2(R_c + R_r)} \quad (15)$$

여기서, s는 벨로우즈 두께이다.

### (2) 종강성 해석

벨로우즈의 종강성  $k_{axial}$ 는 EJMA의 공식<sup>(1)</sup>을 사용하여 계산한다.

$$k_{axial} = 6.80 \frac{R_m E s^3}{h^3 C_f} \quad (16)$$

여기서,

$R_m$  : 벨로우즈의 평균 반지름

$E$  : 탄성계수

$s$  : 벨로우즈 두께

$h$  : 벨로우즈 전체 높이

$C_f$  : 무차원의 계수

### (3) 횡강성 해석

벨로우즈의 횡강성은 등가 보로 모델링하여 계산한다. Fig. 5에서 파이프의 극단면 2차모멘트는 (17)식과 같다.

$$I_p = AR_m^2 \quad (17)$$

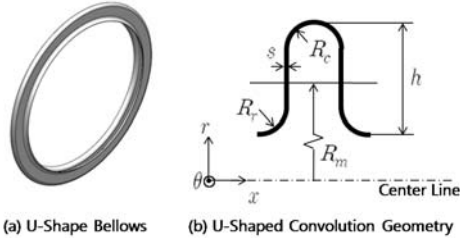


Fig. 4 Model for bellows

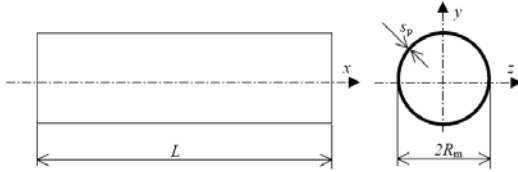


Fig. 5 Thin-walled pipe analogy of bellows

$x$ 축 및  $y$ 축의 단면 이차 모멘트는 다음과 같다.

$$I_x = I_y = I_p/2 = \frac{AR_m^2}{2} \quad (18)$$

등가 보에서  $k_{axial}$ 은

$$k_{axial} = \frac{AE}{L} \quad (19)$$

여기서,

$$L = 2(R_r + R_c)$$

로 나타낼 수 있다. 식(19)을  $A$ 에 대하여 정리한 다음 식(18) 대입하면 다음과 같다.

$$I_x = I_y = \frac{k_{axial}LR_m^2}{2E} \quad (20)$$

식(20)에 식(19)을 대입하여 정리하면 보의 횡강성은 다음과 같으며 횡강성은 종강성으로부터 구할 수 있다.

$$E_p I_x = E_p I_y = \frac{k_{axial}(R_r + R_c)R_m^2}{2} \quad (21)$$

여기서,

$E_p$  : 파이프 등가 모델한 탄성계수

$I_x$  :  $x$  방향 단면이차모멘트

$I_y$  :  $y$  방향 단면이차모멘트

$k_{axial}$  : 종강성

$R_r$  : 골반경

$R_c$  : 마루반경

$R_m$  : 벨로우즈의 평균반경

(3) 벨로우즈의 평균반경  $R_m$ 의 계산

종강성 및 횡강성 계산을 위한  $R_m$ 은  $R_r$ 과  $R_c$ 가 같은 경우 축과 벨로우즈 요소의 도심까지의 거리가 된다. 그러나  $R_r$ 과  $R_c$ 가 다른 경우에는 도심이 달라지므로 Fig. 6과 (22)식에서  $R_m$ 을 계산할 필요가 있다.

$$\bar{y} = R_m = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \quad (22)$$

(4) 회전관성모멘트  $J$ 의 계산

벨로우즈를 보로 등가 모델링하고 회전관성을 고려할 경우 회전관성모멘트  $J$ 를 계산하여야 한다.

회전관성모멘트는 한 개의 벨로우즈의 질량이 벨로우즈 평균 반경  $R_m$ 에 집중되어 있다고 생각할 수 있으므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J = \frac{mR_m^2}{2} \quad (23)$$

### 3. 컴퓨터 시뮬레이션

#### 3.1 Expansion joint의 모델링

(1) 기존 모델

Fig. 7(a)에 기존의 실험과 유한요소해석의 연구 결과<sup>(6)</sup>에 사용하였던 모델을 나타내었다. Fig. 7(b)는 모델의 수치를 나타낸 것으로 두께는 0.368mm, 외경은 152.7mm, 내경은 184.1mm, 벨로우즈 개수

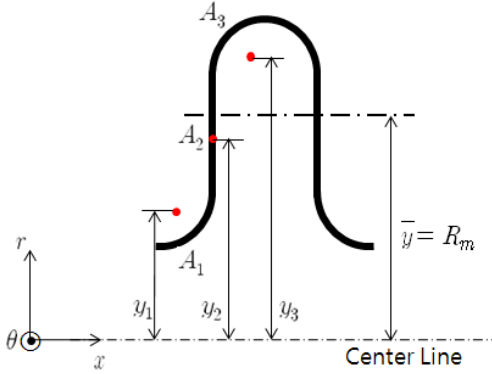


Fig. 6 Calculate center of bellows

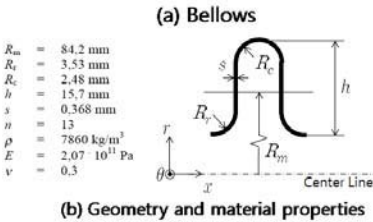


Fig. 7 Model of bellows for analysis

는 13이다. 해석 경계조건은 양단고정(Fix-Fix)조건이다.

(2) 제안한 모델

벨로우즈를 Fig. 1과 같이 스프링-질량으로 모델링 하였다. 길이는 (14)식, Fig. 1과 같이 질량은 벨로우즈 1개당 질량을 (15)식을 이용하여 계산하였다. 벨로우즈의 평균 반경  $R_m$ 은 (22)식을 이용하여 계산한다. 벨로우즈의 개수는 기존 모델과 같이 13으로 하고, 회전관성  $J$ 는 (23)식을 이용하여 계산한다.

경계조건은 기존 모델과 동일하게 양단고정(Fix-Fix)조건으로 설정하고 전달행렬법으로 구한 고유진동수의 타당성을 검증하기 위하여 MIDAS GENw를 이용한 유한요소 해석을 수행하여 결과를 비교한다.

Table 1 Comparison of natural frequencies by calculated differential equation

Mode	Ref <sup>(3)</sup> (A) (Hz)	Present(B) (Hz)	Ratio(B/A)
1st	318.4	318.4	1.00
2nd	877.8	877.7	1.00
3rd	1720.8	1720.2	1.00
4th	2844.6	2842.0	1.00

Table 2 Comparison of axial natural frequencies due to the presence of rotary inertia

Mode	Axial (Hz)				Ratio		
	Ref <sup>(6)</sup> (A)	Midas (B)	Without $J$ (C)	With $J$ (D)	B/A	C/A	D/A
1st	122	121.8	117.0	117.0	0.99	0.95	0.95
2nd	244	243.9	232.4	232.4	0.99	0.95	0.95
3rd	368	366.8	344.4	344.4	0.99	0.93	0.93
4th	495	490.7	451.3	451.3	0.99	0.91	0.91

Table 3 Comparison of bending natural frequencies due to the presence of rotary inertia

Mode	Bending (Hz)				Ratio		
	Ref <sup>(6)</sup> (A)	Midas (B)	Without $J$ (C)	With $J$ (D)	B/A	C/A	D/A
1st	197	197.9	318.4	189.0	1.00	1.61	0.95
2nd	326	326.0	877.7	309.5	1.00	2.69	0.94
3rd	462	464.7	1720.2	432.0	1.01	3.72	0.93
4th	585	588.1	2842.0	534.5	1.01	4.85	0.91

#### 4. 결과 및 고찰

(1) 벨로우즈의 등가 보 검토

벨로우즈를 (16)식과 (22)식을 이용하여 회전관성이 없는 양단의 Fix-Fix 상의 등가보로 모델링하였으며 유효성을 검증하기 위해 Table 1에 모드에 따른 고유진동수를 나타내었다. 기존의 보의 결과<sup>(3)</sup>와 비교해 보면 잘 일치함을 알 수 있었다.

(2) 회전관성  $J$ 를 고려했을 때의 고유진동수

회전관성을 고려한 경우와 그렇지 않은 경우에 대하여 해석하였으며 Table 2와 Table 3는 회전관성에 따라 모드에 따른 고유진동수를 나타내었다.

회전관성을 고려한 경우가 기존의 실험 결과<sup>(6)</sup>와 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

(3) 벨로우즈 높이에 따른 고유진동수 변화 검토

Fig. 8에 벨로우즈의 높이  $h$ 의 변화에 따른 고유진동수 변화를 나타내었다. 벨로우즈의 높이가

증가할수록 고유진동수는 감소하는 것을 알 수 있었으며 여기서 제안한 방법과 상용 FEM 해석 프로그램인 MIDAS와 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

(4) 벨로우즈 피치에 따른 고유진동수 변화검토

Fig. 9에 피치 반경의 변화에 따른 고유진동수 변화를 나타내었다. 전달행렬법과 MIDAS 모두 피치의 변화에 따라 고유진동수 변화가 거의 없고 종진동 및 횡진동의 고유진동수가 잘 일치하였다.

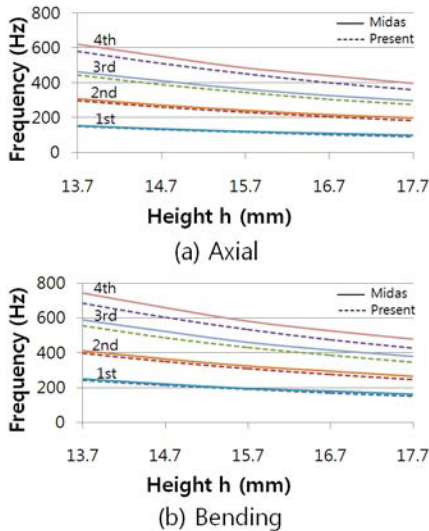


Fig. 8 Change of frequency acc. to height  $h$

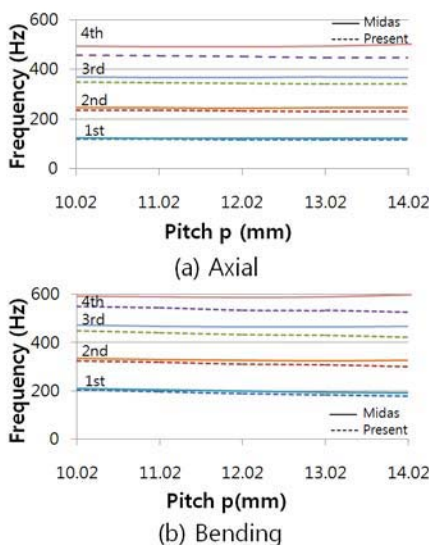


Fig. 9 Change of frequency acc. to pitch  $p$

## 5. 결 론

전달행렬법을 이용하여 벨로우즈의 진동해석을 한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 벨로우즈를 회전관성을 고려하여 동특성 해석하는 전달행렬법을 개발하였다.

(2) 기존의 실험결과 및 FEM과 비교하여 회전관성을 고려하지 않았을 때 고유진동수는 많은 차이를 보였으나, 회전관성을 고려하였을 때 잘 일치하였다.

(3) 벨로우즈의 높이와 피치를 변화시키면서 고유진동수 변화를 FEM과 비교한 결과 잘 일치하였다.

## 참 고 문 헌

(1) EJMA, 1980, Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Fifth.

(2) Lee, Y. S., Yoon, K. S., Kim, T. W., 1999, A Study of the Analysis of the Natural Frequencies and the Development of the Simplified Formulas for Bellows, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 9, No. 2, pp. 331~339.

(3) Tse, F. S. Morse, I. E., Hinkle, R. T., 1978, Mechanical Vibration, Allyn and Bacon.

(4) Lee, J. Y., Park, H. and Oh, J. E., 1990, A Study on the Identification of Characteristics for the 2 Dimensional Continuous Vibration System by Mass Sensitivity Analysis, The Korean Society of Mechanical Engineers, Vol. 14, No. 2, pp. 339~348.

(5) Broman, G. I., Hermann, M. P. and Jonsson, A. P. 1999, Modelling Flexible Bellows by standard Beam Finite Elements, PsilanderGrafiska, Kalskrona..

(6) Jakubauskas, V. F and Weaver, D. S., 1998, Transverse Vibrations of Bellows Expansion Joints. Part II : Beam Model Development and Experimental Verification, Journal of Fluids and Structures Vol. 12, No. 4, pp. 457-473.