

정전기력 가진에 의한 외팔보형 탄소나노튜브 공진기의 비선형 동적 응답

Nonlinear Dynamic Response of Cantilevered Carbon Nanotube Resonator by Electrostatic Excitation

김일광* · 이수일 †

Il Kwang Kim* and Soo Il Lee †

Key Words : Carbon Nanotube(탄소나노튜브), Nano Resonator(나노공진기), Nonlinear modeling(비선형 모델링)

ABSTRACT

This paper predicted the dynamic behaviors of a cantilevered carbon nanotube(CNT) incorporating the electrostatic force, van der Waals interactions between the CNT and ground plane. The structural model of the CNT includes geometric and inertial nonlinearities for predicting various phenomena of nonlinear responses of the CNT due to the electrostatic force. In order to solve the problem, we used Galerkin's approximation and the numerical integration techniques and as a result, we predicted characteristics of nonlinear response of nano resonator. The cantilevered CNT shows complex dynamic responses and instabilities due to the applied dc and ac voltages, and driving frequencies. The results investigated in this paper are helpful to the modeling of nanotube based electromechanical devices such as nano-resonators and nano-sensors.

1. 서 론

CNT(carbon nanotube)는 뛰어난 기계적, 전기적 성질로 나노전자기계시스템(NEMS)의 주요한 소재로 각광받으며 특수한 목적에 부합하는 나노 소자로 응용되고 있다. 이는 나노 단위의 조작용을 위한 집계^(1,2), 스위치^(3,4,5), 메모리⁽⁶⁾와 공진기^(7,8) 등의 많은 연구 결과로 알 수 있다. CNT를 이용한 다양한 나노 소자(nano device)를 연구하는데 있어 나노 영역에서 대두되는 정전기력(electrostatic force)과 반데르발스 상호력(van der Waals interactions) 등을 이해^(3,9)하는 것이 중요하다. 이와 같이 CNT에 작용하는 힘에 따라

이러한 나노 소자는 복잡한 비선형 응답을 보이며 이를 올바르게 예측하는 것이 곧 소자의 성능과 직결된다. 특히, CNT 기반의 나노공진기는 인가 전압에 따른 동적인 구동 특성을 갖는데 그 해석은 제한적이다. 2009년 Ke⁽⁷⁾는 선형 보로 가정한 CNT의 시간 응답을 예측하였으며, 2010년 Ouakad 등⁽⁸⁾은 더 나아가 CNT의 기하학적 비선형성(geometric nonlinearity)을 고려한 나노공진기의 비선형 응답(nonlinear response)을 예측하였다. 하지만 이러한 연구 결과들은 나노공진기를 선형계(linear system)⁽⁷⁾로 가정하였거나 CNT의 관성 비선형성(inertial nonlinearity)을 고려하지 않아⁽⁸⁾ 비선형 거동의 예측에 한계가 있다.

따라서 본 연구는 CNT의 기하학적 비선형성과 관성 비선형성을 동시에 고려한 나노공진기의 모델을 수립하였다. CNT에 작용하는 외력으로는 그래핀(graphene) 전극과 이루는 정전기력, 반데르발스 인력(attractive force)을 고려하였다. 이와 같이 모델링한

† 교신저자; 이수일, 서울시립대학교 기계정보공학과
E-mail : leesooil@uos.ac.kr

Tel : 02-2210-5667, Fax : 02-2210-5575

* 서울시립대학교 대학원 에너지환경시스템공학과

나노공진기의 운동방정식(moment of equation)의 주파수 응답(frequency response)으로부터 그 안정성을 판별하였으며, 그 때의 과도 및 정상 상태의 시간 응답(time response)으로 비선형 동적 응답(nonlinear dynamic response)을 시뮬레이션하였다. 그 결과, CNT를 이용한 외팔보 형태의 나노공진기를 정상적으로 작동시키기 위한 조건을 논의하였다.

2. 나노공진기의 모델링

단일벽(single wall) CNT를 이용한 나노공진기의 개념도를 Fig. 1에 간략히 나타내었다. 이는 CNT의 복원력과 인가되는 전압으로 전극과 이루는 정전기력, CNT가 전극에 접근할수록 영향력이 커지는 반데르발스 상호력의 관계를 나타낸다. 여기서 q_{elec} 은 CNT에 작용하는 정전기력, q_{vdW} 는 반데르발스 상호력을 의미한다. 이들의 관계로부터 운동방정식을 유도하여 무차원화된 식으로 정리하였다.

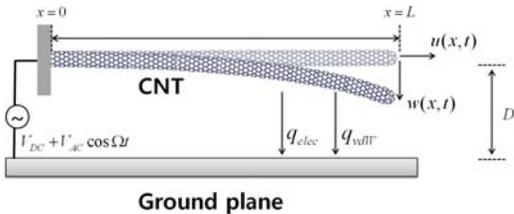


Fig. 1 CNT based electrically actuated nanomechanical resonator.

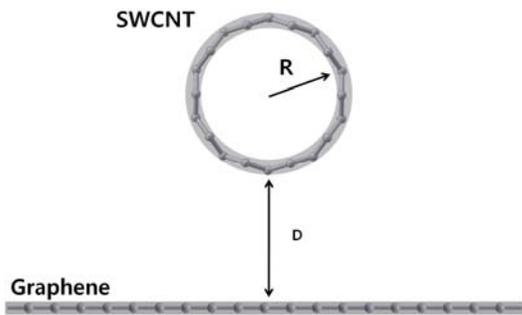


Fig. 2 Cross sectional geometry of SWCNT and graphene ground plane.

2.1 운동방정식

Chaterjee 등⁽¹⁰⁾의 비선형 외팔보 방정식을 참고하여 반지름이 R , 길이가 L 인 CNT의 축방향 변위 $u(x,t)$ 와 처짐 $w(x,t)$ 의 관계로부터 감쇠와 비선형성을 고려한 나노공진기의 운동방정식과 경계조건은 식(1)과 같다. 식 (1a)에서 좌 항의 네 번째 및 다섯 번째 항은 각각 CNT의 기하학적 및 관성 비선형성과 ρ , A , I 는 각각 CNT의 밀도, 원형 단면의 넓이와 단면관성모멘트를 나타낸다. 그리고 E 는 영률(Young's Modulus), c 는 감쇠계수, q_{ex} 는 단일벽 CNT에 작용하는 전체 외력을 의미한다.

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \rho A \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \int_L^x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right)^2 \right\} dx dx \right] = q_{ex}, \quad (1a)$$

$$w(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L,t) = 0. \quad (1b)$$

Fig. 2와 같이 단일벽 CNT에 작용하는 외력은 그 표면과 초기 거리 D 만큼 떨어진 그래핀 전극과 이루는 정전기력, 반데르발스 인력을 생각할 수 있다. 우선, CNT를 완전한 원통형 도체(perfect cylindrical conductor)로 가정하여 그 표면과 전극에 분포하는 전하에 의한 정전기력을 유도하면 식 (2)와 같다⁽³⁾. 식 (2)에서, 전압 V 는 $V_{DC} + V_{AC} \cos \Omega t$ 이며, ϵ_0 은 진공 유전율(vacuum permittivity)을 뜻한다.

$$q_{elec} = - \frac{\pi \epsilon_0 V^2}{\sqrt{D(D+2R)} \log^2 \left[1 + \frac{D}{R} + \sqrt{\frac{D(D+2R)}{R^2}} \right]} \quad (2)$$

반데르발스 인력은 레너드-존스 포텐셜의 관계식⁽⁸⁾으로부터 유도하여 다음과 같이 정리하였다⁽³⁾. 나노공진기는 나노스위치⁽⁵⁾와 달리 전극에 가깝게 운동하거나 접촉하지 않으므로 본 논문에서는 반발력(repulsive force)을 고려하지 않았다.

$$q_{vdW}^{attractive} = -C_6 \sigma^2 \pi^2 R \sqrt{D(D+2R)} \times \frac{(8D^4 + 32D^3R + 72D^2R^2 + 80DR^3 + 35R^4)}{2D^5(D+2R)^5} \quad (3)$$

식 (3)에서 C_6 은 탄소와 탄소 간의 반데르발스

인력의 상수 값으로 $15.2\text{eV}\text{\AA}^{-6}$ 이며, D 는 두 탄소 원자 사이의 거리, σ 는 탄소의 면 밀도(surface density)이다.

이로써 단일벽 CNT와 그래핀 전극으로 모델링한 나노공진기의 운동방정식은 식 (4)로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \rho A \ddot{w} + EI w'''' + c \dot{w} \\ & + EI [w'(w'w'')] + \rho A \left[w' \int_L^x \int_0^x \{ \ddot{w}' w' + (\dot{w}')^2 \} dx dx' \right] \\ & = q_{elec} + q_{vdW}^{attractive}. \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (5)의 무차원 변수들을 이용하여

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{w}{D_0}, \quad R^* = \frac{R}{D_0}, \quad D^* = \frac{D}{D_0} = \frac{(D_0 - w)}{D_0}, \\ x^* &= \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\omega_n}. \end{aligned} \quad (5)$$

식 (6), (7)로 정리할 수 있으며 편의상 윗 첨자(*)를 생략하였다. 여기서 고유진동수(natural frequency) ω_n 는 $\beta^2 \sqrt{EI / \rho AL^4}$, 이 때 1차 고유진동모드로 β^2 은 3.516, V 는 $V_{DC} + V_{AC} \cos \beta^2 \Omega t$ 이다.

$$\begin{aligned} & \ddot{w} + w'''' + c \dot{w} + \gamma_1 [w'(w'w'')] + \gamma_2 \left[w' \int_1^x \int_0^x \{ \ddot{w}' w' + (\dot{w}')^2 \} dx dx' \right] \\ & = \gamma_2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-w)(1-w+2R)} \log^2 \left[1 + \frac{1-w}{R} + \sqrt{\frac{(1-w)(1-w+2R)}{R^2}} \right]} dx \\ & + \gamma_3 \int_0^1 R \sqrt{(1-w)(1-w+2R)} \\ & \times \frac{(8(1-w)^4 + 32(1-w)^3 R + 72(1-w)^2 R^2 + 80(1-w)R^3 + 35R^4)}{(1-w)^2 (1-w+2R)^5} dx \end{aligned} \quad (6a)$$

$$w(0,t) = 0, \quad w'(0,t) = 0, \quad w''(1,t) = 0, \quad w'''(1,t) = 0 \quad (6b)$$

여기서

$$c = \frac{\beta^2}{Q}, \quad \gamma_1 = \left(\frac{D}{L} \right)^2, \quad \gamma_2 = \frac{\pi \epsilon_0 V^2 L^4}{D^2 EI}, \quad \gamma_3 = \frac{C_6 \sigma^2 \pi^2 L^4}{2D^5 EI}. \quad (7)$$

2.2 갤러킨 근사화 및 곡선적합

2.1절에서 유도한 나노공진기의 무차원 운동방정식을 계산하기 위해 갤러킨 근사화(Galerkin's approximation)를 이용하여 이산계로 정리하였다. 나노공진기의 응답 $w(x,t)$ 의 근사해는 1차 모드응답으로 가정하면 다음 식 (8)과 같으며,

$$w(x,t) = y_1(t) \phi_1(x), \quad (8a)$$

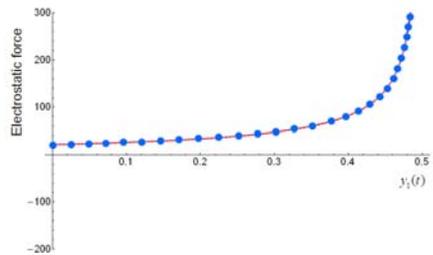
$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= A_1 \left[\sin \beta_1 x - \sinh \beta_1 x \right. \\ & \left. - \frac{\sin \beta_1 L + \sinh \beta_1 L}{\cos \beta_1 L + \cosh \beta_1 L} (\cos \beta_1 x - \cosh \beta_1 x) \right], \end{aligned} \quad (8b)$$

여기서 $y_1(t)$ 는 시간에 대한 응답 함수이며, $\phi_1(x)$ 는 시도함수(trial function)로 외팔보의 고유함수⁽¹¹⁾를 이용하였다. 식(8)을 운동방정식(6)에 대입하여 정리하면 식 (9)와 같다.

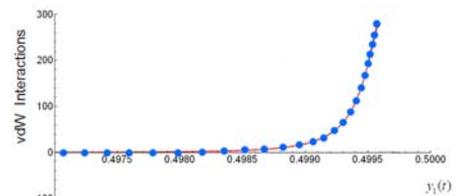
$$\begin{aligned} & \ddot{y}_1(t) + c \dot{y}_1(t) + k y_1(t) + \eta_G y_1(t)^3 \\ & + \eta_I (y_1(t)^2 \ddot{y}_1(t) + y_1(t) \dot{y}_1(t)^2) = q_{elec} + q_{vdW}^{attractive}, \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 k 는 CNT의 강성(stiffness), η_G 와 η_I 는 각각 CNT의 기하학적 및 관성 비선형항의 계수를 의미한다.

식 (9)의 외력의 적분식은 모드형상함수 $\phi_1(x)$ 와 시간해 $y_1(t)$ 의 조합의 음함수(implicit function)로 직접 시스템의 시간해를 구하는 데 어려움이 따른다. 하지만 수치적분을 이용하여 시간해를 순차적으로 계산⁽⁸⁾할 수 있으나 상당한 계산 시간이 소비되는 단점이 있다.



(a) Electrostatic force on $V_{DC} = 10V$



(b) van der Waals attractive forces

Fig. 3 The force distribution of curve fitting(blue dot, ●) and numerical integration(red line, -) of each external force on SWCNT.

Table 1 The coefficients of Eq. (2.12)

d_2	d_3	d_4	m	n
0.02	0.007	0.00087	0.75	3.5

계산의 신속함을 위해 외력의 항을 다음과 같은 방법으로 근사화하였다. CNT가 최대 처짐을 갖는 끝 단 $\phi_1(t) = \phi_{\max}$ 을 기준으로 전극이 이루는 간격에 따라 변하는 외력의 크기를 미리 계산하였다. 무차원화된 CNT의 최대 처짐 $w(1,t)$ 는 1이므로 시간에는 $y_1(t) \leq 1/\phi_{\max}$ 와 같은 범위를 지니게 된다. 그 후 분수함수 꼴의 곡선적합(curve fitting)을 이용하여 각 힘을 $y_1(t)$ 에 대하여 정전기력과 반데르발스 상호력을 각각 식 (10), (11)으로 근사화하였다.

$$\tilde{q}_{elec} = \alpha_2 \frac{d_2}{(1/\phi_{\max} - y_1(t))^m}, \quad (10)$$

$$\tilde{q}_{vdw} = \alpha_3 \frac{d_3}{(1/\phi_{\max} - y_1(t))^n}, \quad (11)$$

여기서, CNT의 길이 L 은 2500nm, 반지름 R 은 5.45nm, CNT와 전극이 이루는 간격 D 는 390nm일 때, 식 (10), (11)의 계수들은 Table 1과 같다. 그 결과, 본 외력의 적분된 함수와 식 (10), (11)의 근사화된 외력의 함수가 서로 잘 일치함을 Fig. 3과 같이 확인하였다. 이와 같이 본 연구에서 가정한 범위에서 근사화된 외력의 함수가 더 간단하여 계산의 속도가 빠른 동시에 본 함수와 높은 일치도를 보이므로 나노공진기의 거동을 해석하는데 식 (10), (11)를 이용하였다.

3. 해석 결과

2장에서 유도한 나노공진기의 무차원 운동방정식을 MATLAB과 AUTO⁽¹²⁾를 이용하여 각각 비선형 주파수 응답과 시간 응답을 계산하였다.

나노공진기의 Q 값이 150일 때, 전극에 인가시키는 고정된 AC 전압 $V_{AC} = 0.3$ 과 DC전압의 변화에 따른 주파수 응답 특성을 예측하였다(Fig. 4). 인가 전압에 따라 CNT에 작용하는 정전기력은 V^2 에 비례하므로

$$V^2 = V_{DC}^2 + 2V_{DC}V_{AC} \cos \Omega t + \frac{1}{2}V_{AC}^2(1 + \cos 2\Omega t), \quad (12)$$

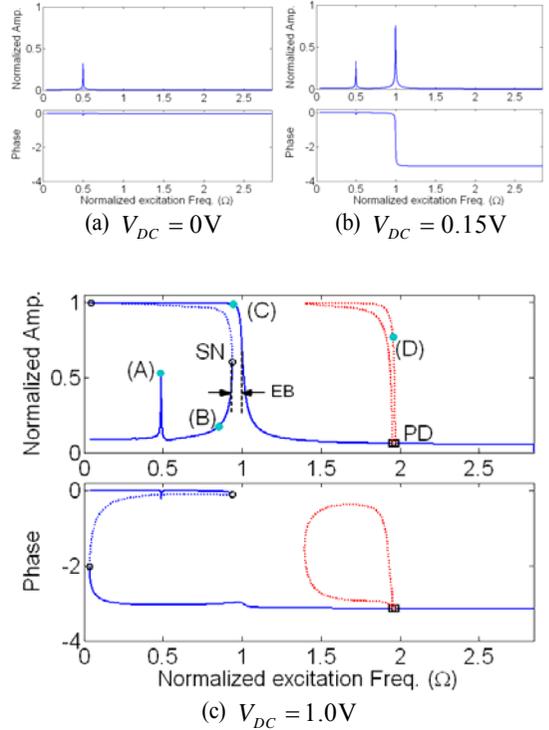


Fig. 4 The frequency responses of the nano resonator with variant DC voltage load on $V_{AC} = 0.15$ and $Q = 150$. The SN is a saddle-node bifurcation, PD is a period doubling bifurcation, the dotted line is unstable branch and the (A)-(D) are initial excitation frequency condition for the time response.

식 (12)와 같으며 각 DC와 AC전압이 나노공진기의 응답에 미치는 영향을 유추할 수 있다. 예를 들어 Fig. 4(a)와 같이 $V_{DC} = 0$ 일 때, 나노공진기의 거동은 $V_{AC}^2(1 + \cos 2\Omega t)/2$ 에 지배를 받는다. 즉, Fig. 4(a)와 같이 선형 기초주파수(fundamental frequency)의 약 절반에 해당하는 주파수로 나노공진기가 가진되지만 기초주파수 응답에 해당하는 고조파(superharmonic) 주파수 응답 피크(peak)를 보였다. 위상 응답에서는 고조파 주파수에 해당하는 지점에서의 위상이 약간 변함을 확인하였다. DC전압을 $V_{DC} = 0.15$ 로 약간 증가시켰을 때, DC전압의 영향으로 식 (12)와 같이 나노공진기의 고조파 응답과 동시에 기초주파수 응답을 보이는 것을 Fig 4(b)로 예측되었다. 특히 위상 응답에서는 기초주파수에 해당하는 주파수에서 위상이 π 만큼 차이가 나는 것을 알 수 있다.

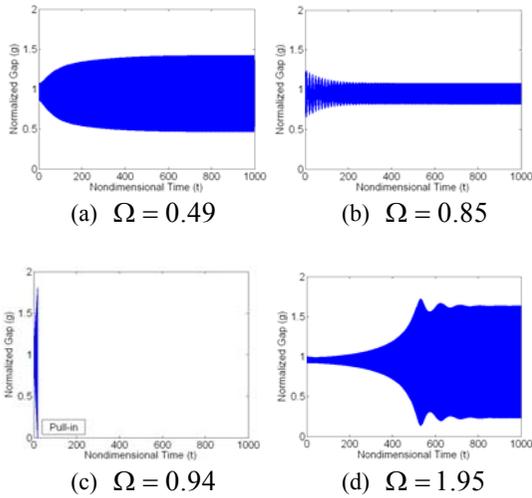


Fig. 5 The time responses of the nano resonator with various excited frequency on $V_{DC} = 1.0V$, $V_{AC} = 0.3V$ and $Q = 150$.

Fig. 4(c)는 AC전압보다 더 높은 DC전압을 전극에 인가시켰을 때, 나노공진기의 비선형 응답을 보인 것이다. 그리고 Fig. 4(c)의 (A)-(D)에 해당하는 가진주파수의 시간 응답을 각각 Fig. 5에 나타내었다. 주파수 및 위상 응답에서는 고조파 응답과, 기초주파수 및 저조파 응답의 주파수 변화 특성을 보여준다. AC전압의 영향으로 앞선 결과와 같은 주파수 및 위상에서 고조파 응답 특성을 보인다. 고조파 $\Omega = 0.49$ 의 주파수 피크와 Fig. 5(a)로 나타낸 그 시간 응답의 진폭이 일치함을 확인하였다. 고조파 응답은 가진주파수의 2배의 주파수를 갖는 응답을 뜻하며 이는 Fig. 6에 나타내었다. 기초주파수의 약 절반에 해당하는 고조파 $\Omega = 0.49$ 로 나노공진기를 가진할 경우(Fig. 6(a)) 그 시간 응답은 기초주파수 응답(Fig. 6(b)) 주파수와 일치한다.

나노공진기의 기초주파수 응답에서 주파수 변화 효과(softening effect)가 발생하였다. 전압의 크기 V 가 증가할수록 CNT에 작용하는 정전기력의 영향으로 나노공진기의 응답 특성을 다음 식 (13)으로 예측할 수 있다. 식 (13)은 $t \approx 0$ 에서 나노공진기의 무차원 운동방정식을 $y_1(t)$ 에 대하여 3차 테일러 급수 전개로 표현한 일부이다.

$$\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + \dots + (a_3 - b_3V^2)y_1(t)^3 + \dots + O(y_1(t)^4) = 0 \quad (13)$$

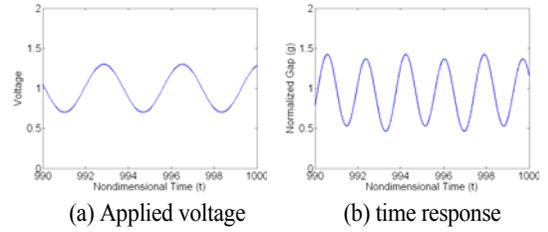


Fig. 6 The applied voltage and time response of the nano resonator on $V_{DC} = 1.0V$, $V_{AC} = 0.3V$, $\Omega = 0.49$ and $Q = 150$.

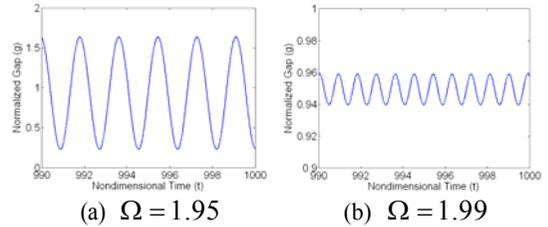


Fig. 7 The different period at each excited frequency in steady state with $V_{DC} = 1.0V$, $V_{AC} = 0.3V$ and $Q = 150$.

전압 V 가 증가할수록 식 (13)의 3차 비선형항의 계수가 음의 값을 갖게 되어 나노공진기의 강성이 감소하는 주파수 변화 효과⁽¹³⁾를 보이는 것을 위와 같은 관계로 이해할 수 있다. 그리고 나노공진기의 응답 안정성이 변화하는 saddle-node(SN) 분기(bifurcation)가 발생하였으며 CNT가 전극에 달라 붙거나 튀는 거동을 보여 공진기로 사용하기 어려운 탈출 구간(escape band; EB)⁽⁸⁾이 시간 응답 시뮬레이션으로 확인되었다. 나노공진기의 기초주파수 근방의 비선형 응답의 특징을 이해하기 위해 시간 응답 Fig. 5(b), (c)로 비교하였다. 특히 Fig. 5(c)와 같이 탈출구간에 속하는 가진주파수 $\Omega = 0.94$ 의 시간 응답은 CNT가 전극에 달라붙어 나노공진기로 사용하기 어려운 응답을 보였다.

CNT에 작용하는 정전기력이 파라메트릭 가진(parametric excitation)으로 작용하여 기초주파수의 약 2배에 일치하는 주기배가(period-doubling; PB) 분기가 저조파(subharmonic) 응답에서 발생하였다⁽¹⁴⁾. 저조파 응답은 가진주파수의 절반에 해당하는 시간 응답을 의미한다. 주기배가분기의 주파수 응답 또한 기초주파수 응답과 같이 주파수 변화 효과가 발생하였다. 주기배가 분기 현상을 이해하기 위해 이 영역에 속

하는 가진주파수 $\Omega = 1.95$ 와 속하지 않은 가진주파수 $\Omega = 1.99$ 의 시간 응답을 Fig. 7로 비교하였다. Fig. 5(d)는 주기배가 분기 영역에 속하는 시간 응답으로 과도 및 정상상태의 시간응답을 보여준다. 정상상태의 시간응답은 Fig. 7(a)과 같으며, 가진주파수 대비 약 절반의 주파수를 갖는 시간 응답을 보여주지만 주기배가 분기 영역 내에 해당하지 않는 주파수로 가진할 때의 시간 응답의 주파수는 가진 주파수와 일치함을 Fig. 7(b)로 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서 CNT를 이용한 외팔보형 나노공진기의 비선형 운동방정식을 유도하고 수치해석을 통한 시뮬레이션으로 비선형 동적 해석을 하였다. 나노공진기의 비선형 주파수 응답 결과 전극에 인가시키는 DC 전압에 따라 다양한 비선형 응답을 예측하였다. 더 나아가, 시간응답을 시뮬레이션하여 나노공진기의 동적 응답을 이해하였다. 나노공진기의 고조파 응답은 AC전압에 영향을 받으며, 기초주파수 응답은 DC전압에 영향을 받는다. 특히 DC전압의 세기가 증가할수록 다양한 비선형 응답특성을 보이는데, 기초주파수 및 저조파 응답에서 주파수 연화 효과가 발생하였다. 주파수 연화 효과 및 주기배가 분기의 응답 특성은 정전기력이 CNT에 비선형으로 영향을 미치는 것으로 설명되었다. 이 때, 기초주파수 응답에서 정상적인 나노공진기로 사용할 수 없는 탈출구간의 존재를 확인하였으며, 주기배가 분기는 정전기력이 주기적인 힘으로 작용하여 파라메트릭 공진현상으로 설명되었다. 본 논문의 나노공진기의 비선형 동적 해석결과 외팔보형 나노소자를 설계하는데 도움을 줄 것이다.

후 기

본 연구는 2010년도 연구재단 기본연구지원사업 (과제번호 2010-0011761)의 지원으로 이루어졌음.

참 고 문 헌

(1) Kim, P., and Lieber, C. M., 1999, "Nanotube Nanotweezers," *Science*, Vol. 286, No. 5447, pp.2148~2150.
 (2) Akita, S., Nakayama, Y., Mizooka, S., Takano,

Y., Okawa, T., Miyatake, Y., Yamanaka, S., and Tsuji, M., 2001, "Nanotweezers Consisting of Carbon Nanotubes Operating in an Atomic Force Microscope," *Applied Physics Letters*, Vol. 79, No. 11, pp.1691~1694.

(3) Dequesnes, M., Rotkin, S. V., and Aluru, N. R., 2002, "Calculation of Pull-in Voltages for Carbon-Nanotube-Based Nanoelectromechanical Switches," *Nanotechnology*, Vol. 13, pp.120~131.

(4) Dequesnes, M., Tang, Z., and Aluru, N. R., 2004, "Static and Dynamic Analysis of Carbon Nanotube-Based Switches," *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 126, pp.230~237.

(5) Kim, I. K. and Lee, S. I., 2010, Dynamic Analysis of Electrically Actuated Nanomechanical Switch, *Proceedings of the KSNVE Annual Autumn Conference*, pp. 572~573.

(6) Bichoutskaia, E., Popov, A. M., and Lozovik, Y. E., 2008, "Nanotube-Based Data Storage Devices," *Materials Today*, Vol. 11, No. 6 pp.38~43.

(7) Ke, C. H., 2009, "Resonant Pull-in of a Double-Sided Driven Nanotube-Based Electromechanical Resonator," *Journal of Applied Physics*, Vol. 105, No. 024301.

(8) Ouakad, H. M., and Younis, M. I., 2010, "Nonlinear Dynamics Actuated Carbon Nanotube Resonators," *ASME Journal of Computational Nonlinear Dynamics*, Vol. 5, No. 011009.

(9) Israelachvili, J., 1992, *Intermolecular and Surface Forces*, Second ed., Academic Press, London.

(10) Chatterjee, S., and Pohit, G., 2009, "A Large Deflection Model for the Pull-in Analysis of Electrostatically Actuated Microcantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, pp.969~986.

(11) Meirovitch, M., 2001, *Fundamentals of Vibrations*, International ed., McGraw-Hill, pp. 399~401.

(12) Doedel, E. J., Champneys, A. R., Fairgrieve, T. F., Kuznetsov, Yu. A., Sandstede, B., and Wang, X.J., 2009, AUTO-07p : Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations, Concordia University.

(13) Nayfeh. A. H., and Mook. D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, New York.

(14) Rand. R. H., 2005, *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*, Cornell University, Version 52.