한국소음진동공학회 2011년 춘계학술대회논문집, pp.329~330

임의 형상 평판의 고정밀도 자유진동해석을 위한 분할영역법 기반 NDIF 법 개발

Development of the NDIF method for accurate free vibration analysis of arbitrarily shaped plates using a sub-domain method

강상욱† · 이수일*
S. W. Kang and S. I. Lee

1. 서 론

임의 형상 평판의 고유치 및 고유모드를 추출하기 위한 다양한 연구 결과들이 많이 발표되어 있는 상태이다. 본 논문의 저자는 다양한 경계 조건을 가진 임의 형상 평판의 고정밀도 고유치 추출을 위한 방법으로, NDIF 법(method of Non-dimensional Dynamic Influence Function)을 처음 개발하였다[1, 2]. NDIF 법은 볼록 평판에는 정확한 결과를 제공하나, 오목 평판에 대해서는 해의 정밀도가 떨어지는 단점을 가진다. 본 논문에서는 상기 단점을 극복하기 위하여, 해석 대상 오목 평판의 영역을 여러 개의 볼록 영역으로 분할한 다음, 각각의 볼록 영역에 대해 NDIF 법을 적용하는 방안이 연구되었다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

단순지지 경계조건을 가진 평판은 고정 경계조건을 가진 멤브레인과 진동 특성 면에서 유사성을 가지기 때문에[3], 평판의 자유진동 운동 방정식과 경계조건은 식(1, 2)와 같이 각각 표현될 수 있다.

$$\nabla^2 W + \Lambda^2 W = 0\,,\ W_\Gamma = 0\,, \qquad (1,\ 2)$$

여기서 W 는 평판의 진동변위를 뜻한다. 그리고, 평판의 고유진동수는 식(3)에 의해, 고유치로부터 환산될 수 있다.

$$f_i = (\Lambda_i^2 / 2\pi)\sqrt{D/\rho_s}\,, \qquad (3)$$

여기서 f_i 는 i 번째 고유진동수, Λ_i 는 i 번째 고유치를 뜻한다.

2.2 영역 분할과 국부 시스템 행렬식 추출

Fig. 1 은 본 논문의 해석 대상 평판인 임의 형상 오목 평판을 보여준다. 오목 평판을 먼저 두 개의 볼록 영역 D_I 와 D_{II} 로 분할한 후 각각의 영역을 여러 개의 노드로 분할한다. 그리고, 각각의 영역에 대해 기존의 NDIF 법을 적용하면 다음의 두 개의 국부 시스템 행렬식들을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}_I\,\mathbf{A}_I = \mathbf{U}_I\,,\ \ \mathbf{SM}_{II}\,\mathbf{A}_{II} = \mathbf{U}_{II}\,, \qquad (4,\ 5)$$

여기서 행렬 $\mathbf{SM}_I$ 와 $\mathbf{SM}_{II}$ 는 영역 D_I 와 D_{II} 에 대한 시스템행렬을 나타내며, 벡터 $\mathbf{A}_I$ 와 $\mathbf{A}_{II}$ 는 영역 D_I 와 D_{II} 에 대한 기여도벡터를 나타내며, 각각 $\mathbf{U}_I$ 와 $\mathbf{U}_{II}$ 는 경계 $\Gamma_1 + \Gamma_a$ 와 $\Gamma_2 + \tilde{\Gamma}_a$ 에서의 변위벡터를 뜻한다.

다음으로, 식(4, 5)는 다음과 같이 경계 노드와 접경 노드에 대한 식으로 분리한다.

$$\mathbf{SM}_{11}\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{SM}_{1a}\,\mathbf{A}_a = \mathbf{U}_1\,, \qquad (6)$$

$$\mathbf{SM}_{a1}\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{SM}_{aa}\,\mathbf{A}_a = \mathbf{U}_a\,, \qquad (7)$$

$$\mathbf{SM}_{22}\,\mathbf{A}_2 + \mathbf{SM}_{2a}\,\mathbf{A}_a = \mathbf{U}_2\,, \qquad (8)$$

$$\mathbf{SM}_{a2}\,\mathbf{A}_2 + \mathbf{SM}_{aa}\,\tilde{\mathbf{A}}_a = \tilde{\mathbf{U}}_a\,, \qquad (9)$$

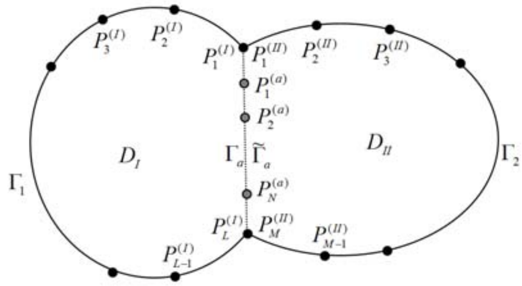

Fig. 1 Concave plate divided with 2 convex domains

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : 02-760-4228, Fax : 02-760-4329
* 서울시립대학교 기계정보공학과

여기서 $\mathbf{U}_1$ 과 $\mathbf{U}_2$ 는 각각 경계 Γ_1 과 Γ_2 위에 있는 노드들에 대한 변위벡터를 뜻하며, $\mathbf{U}_a$ 와 $\tilde{\mathbf{U}}_a$ 는 각각 접경 Γ_a 와 $\tilde{\Gamma}_a$ 위에 있는 노드들에 대한 변위벡터를 뜻한다.

실제 평판의 경계 변위는 0 이므로, 식(6, 8)에 $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = 0$ 를 적용하면, 식(6, 8)은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{SM}_{11}^{-1}\mathbf{SM}_{1a}\mathbf{A}_a, \tag{10}$$

$$\mathbf{A}_2 = -\mathbf{SM}_{22}^{-1}\mathbf{SM}_{2a}\tilde{\mathbf{A}}_a. \tag{11}$$

식(10, 11)을 각각 식(7, 9)에 대입하고, 접경에서의 연속조건인 변위연속조건과 기울기연속조건 $\mathbf{U}_a = \tilde{\mathbf{U}}_a$ 와 $\partial\mathbf{U}_a/\partial n = \partial\tilde{\mathbf{U}}_a/\partial n$ 을 고려한다면, 다음과 같은 최종 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}(\Lambda)\ \mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

여기서 $\mathbf{SM}(\Lambda)$ 와 $\mathbf{A}$ 는 두 영역 D_I 와 D_{II} 에 대한 전체 시스템행렬과 전체 기여도 벡터를 뜻하며, 다음과 같이 구성된다.

$$\mathbf{SM} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}_{aa} - \mathbf{SM}_{a1}\mathbf{SM}_{11}^{-1}\mathbf{SM}_{1a} & \mathbf{SM}_{a2}\mathbf{SM}_{22}^{-1}\mathbf{SM}_{2a} - \mathbf{SM}_{aa} \\ \mathbf{SM}'_{aa} - \mathbf{SM}'_{a1}\mathbf{SM}_{11}^{-1}\mathbf{SM}_{1a} & \mathbf{SM}'_{a2}\mathbf{SM}_{22}^{-1}\mathbf{SM}_{2a} - \mathbf{SM}'_{aa} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_a \\ \tilde{\mathbf{A}}_a \end{Bmatrix}, \tag{13, 14}$$

여기서 $\mathbf{SM}'_{()} = \partial\mathbf{SM}_{()}/\partial n$.

마지막으로 해석 대상 평판의 고유치는 식(13)의 시스템행렬의 판별식 $\det[\mathbf{SM}(\Lambda)] = 0$ 의 해로부터 구할 수 있으며, 고유치는 식(3)에 의해 고유진동수로 환산된다.

3. 증명 예제

본 연구에서 정식화된 이론의 정확성을 검증하기 위하여 여러 가지 형상의 평판을 고려하였으나, 지면 관계상 Fig. 2 와 같은 알파벳 L 자 형상을 가진 평판에 대한 검증 예제만을 제시한다. 본 예제에서는 두께(h)가 0.005m, 영률(E)이 210GPa, 프와송비(ν)가 0.3, 밀도(ρ_s/h)가 7800kg/m^3 인 물성치를 가진 평판이 사용되었다.

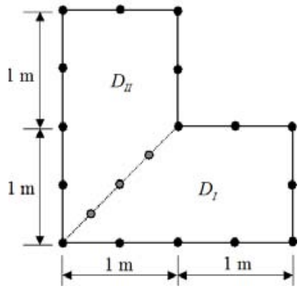

Fig. 2 L-shaped, concave plate divided with 2 domains

Table 1 Natural frequencies of the L-shaped plate

Natural frequency	Proposed method 19 nodes	Proposed method 27 nodes	FEM 1322 nodes
1	2.540	2.492	2.414
2	3.738	3.777	3.796
3	4.920	4.920	4.942
4	7.359	7.359	7.386
5	8.425	8.166	8.024
6	10.127	10.512	10.448

Fig. 1 에서와 같이 해석 대상 오목 평판은 두 개의 볼록 영역으로 나누는 방법으로 분할영역법에 근거한 NDIF 법이 적용되었다. 본 논문에서 제안된 방법에 의해 구한 고유진동수 결과는 Table 1 에 제시되어 있으며, 1322 개를 사용한 FEM (NASTRAN) 해석 결과와 비교해볼 때, 아주 적은 개수의 노드를 사용함에도 불구하고 본 논문에서 구한 고유진동수들이 정확한 결과를 제공하고 있음을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 단순지지 경계조건의 가진 오목 평판의 고유진동수를 정확하게 구할 수 있는 방법으로, 분할영역법 기반 NDIF법에 대한 이론 정식화가 성공적으로 이루어졌으며, 향후 고정단 및 자유단 경계조건에도 본 이론을 확장할 예정이다.

후기

이 논문은 2010 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0009422).

참고문헌

(1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, “Vibration analysis of arbitrarily shaped membrane using non-dimensional dynamics influence function,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.

(2) Kang, S. W. and Lee J. M., 2001, “Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-type functions,” Journal of Sound and Vibration. Journal of Sound and Vibration. Vol. 242. No, 1, pp. 9~26.

(3) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, New York: Litton Education Publishing.