

# 비선형 연성효과를 고려한 전개하는 보의 동적 거동해석

## Dynamic Response Analysis of a Deploying Beam with a Non-Linear Coupled Effect

박성필\* · 정진태†  
**Sungpil Park and Jintai Chung**

방향 변위와의 연성효과에 대한 연구를 수행하였다.

### 1. 서 론

축방향으로 길이가 증가하는 보를 이용한 기계시스템은 산업 전반적으로 널리 사용되는 구조이며 산업용 로봇 매니플레이터(robot manipulator), 인공위성의 안테나와 같은 어펜디지(appendage), 공작기계 그리고 적재차량의 신축성 부재 등이 그 예가 된다. 이러한 기계시스템은 전개하는 보의 동특성을 정확히 묘사하는 해석 모델을 바탕으로 설계되어야 한다. 부정확한 동역학 모델은 부적절한 설계를 가져오며 이는 시스템의 진동 증가를 유발하여 성능 저하를 초래하기 때문에 전개하는 보의 거동 특성에 관한 연구가 필요하다.

전개하는 보에 대한 연구는 많은 연구자에 의해서 수행되어왔다. 초기에는 보에 대한 연구보다는 축방향으로 이동되는 실(thread line)이나 톱날 기계의 톱날(band saw)의 운동이 관심의 대상이 되었다. 이후, 인공위성 어펜디지 등의 시스템을 탑재한 우주구조물에 대한 연구를 바탕으로 전개하는 보에 대한 연구가 많이 수행되었다. 특히 많은 연구자들은 보가 축방향으로 전개하는 동안 발생하는 횡방향 변위에 대해 많은 관심 가졌으며 이에 대하여 동특성 분석, 안정성 해석, 실험적 분석 등을 수행하였다. 하지만 기존 연구자들이 수행한 연구내용과 달리 전개하는 보의 축방향 변위도 함께 고려되어야 한다. 그 이유는 보가 가지는 비선형적 변형률 특성에 의해서 축방향 변위가 횡방향 거동에 비선형 연성 효과를 가져다 주기 때문이다. 따라서 본 논문은 전개하는 보의 축방향 변위와 이로 인한 횡

### 2. 축방향 변위를 고려한 지배방정식 유도

#### 2.1 모델링

축방향 변위를 포함하는 전개한 보의 모델링을 위하여 Fig. 1과 같이 고정된 벽면으로부터 길이가 증가하는 외팔보를 해석 모델로 수립하였다. 보의 오일러 보로 가정하였으며 균일탄성보로서 일정한 탄성계수  $E$ , 단위체적당 밀도  $\rho$  그리고 단면적  $A$ 를 갖는다. 보의 임의의 시간  $t$ 에서 외력  $F$ 에 의해  $V(t)$ 의 속도로 전개되며  $L(t)$ 의 전개길이를 가지게 된다. 또한 고정된 벽면으로부터 돌출된 보의 일정한 크기의 분포력  $p$ 를 받게 되며 본 연구에서는 이를 중력으로 가정하여  $\rho Ag$ 로 나타내었다. 또한 외팔보 위의 임의의 점  $P$ 는 변형에 의해 점  $P^*$ 로 이동하게 되어 축방향 변위  $u(x,t)$ 와 횡방향 변위  $v(x,t)$ 를 가지게 된다. 따라서 변형 후의 점  $P^*$ 의 위치벡터를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}=(x+u)\mathbf{i}+v\mathbf{j} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{i}$ 와  $\mathbf{j}$ 는 각각 축방향과 횡방향 단위벡터를 의미한다. 또한 점  $P^*$ 의 속도벡터를 얻기 위하여 위치벡터에 대해 물질미분을 수행하였으며, 또한 외팔보가 가지는 비선형 변형률 특성을 위하여 von Karman 비선형 변형률 이론을 도입하였다. 얻어진 점  $P^*$ 의 속도벡터  $\mathbf{v}$ 와 변형률  $\epsilon_x$ 는 다음과 같다.

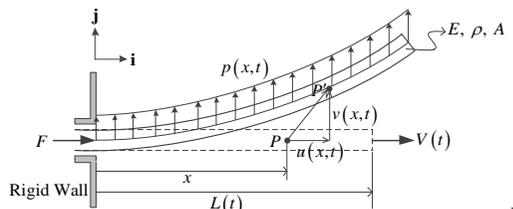


Fig.

1. Mathematical model of Deploying Beam

† 교신저자; 정진태, 한양대학교 기계공학과  
 E-mail : jchung@hanyang.ac.kr  
 Tel : 031-400-5287, Fax : 031-406-6964

\* 한양대학교 일반대학원

$$\mathbf{v} = \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

여기에서  $y$ 는 외팔보 증립축에서 임의의 점까지의 횡방향 길이를 나타낸다.

## 2.2 지배방정식 유도

전개하는 보의 지배방정식을 유도하기 위하여 속도벡터와 비선형 변형률을 다음의 운동에너지  $T$ 와 변형에너지  $U$ 에 적용하였다.

$$\delta T = \int_{A_0} \int_0^{L(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dx dA \quad (4)$$

$$\delta U = \int_{A_0} \int_0^{L(t)} \boldsymbol{\sigma}_x \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_x dx dA \quad (5)$$

여기에서  $\delta$ 는 변분 연산자이고,  $\boldsymbol{\sigma}_x$ 는 축방향 응력을 나타내며  $E\boldsymbol{\varepsilon}_x$ 와 같다. 얻어진 에너지들은 아래의 확장된 해밀턴 원리(Expanded Hamilton principle)에 적용되어 지배방정식과 경계조건을 얻어낸다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (6)$$

$W_{nc}$ 는 비보존력에 의한 일 그리고  $M$ 은 운동량 수송 에너지를 의미한다. 결국 유도되는 지배방정식은 다음과 같다.

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$= -\rho A \dot{V} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (8)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = p$$

식 (7)과 식 (8)은 각각 축방향과 횡방향에 대한 비선형 운동방정식이며, 식 (8)의 좌변 여섯 번째 항을 살펴보면 축방향 변위  $u$ 와 횡방향 변위  $v$ 가 연성되어져 있음을 확인할 수 있다. 이것은 보의 기하학적 비선형성에 의해 나타난 결과이다.

## 3. 이산화 방법

본 연구에서는 이산화 지배방정식을 얻기 위하여 Galerkin 방법을 이용하였으며, 이산화를 위한 기저함수는 다음 식 (9)의 시도함수(trial function)와 식 (10)의 가중함수(weighting function)를 이용하였다.

$$u = \sum_{j=1}^J \alpha_j(t) \cos \frac{j\pi x}{L(t)}, \quad v = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) x \sin \frac{n\pi x}{L(t)} \quad (9)$$

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^J \bar{\alpha}_i(t) \cos \frac{i\pi x}{L(t)}, \quad \bar{v} = \sum_{m=1}^N \bar{\beta}_m(t) x \sin \frac{m\pi x}{L(t)} \quad (10)$$

위의 기저함수를 지배방정식에 적용하여 얻어진 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^J \{ m_{jj} \ddot{\alpha}_j + (2g_{jj}^t + Vg_{jj}^x) \dot{\alpha}_j + (h_{jj}^t + V\gamma_{jj}^{tx} + k_{jj} + \dot{V}g_{jj}^x) \alpha_j \} \quad (11)$$

$$= (1 - \rho V^2 / E) F \bar{u}(0) - \rho A \dot{V} f_i$$

$$\sum_{n=1}^N \{ m_{nn} \ddot{\beta}_n + (2g_{nn}^t + Vg_{nn}^x) \dot{\beta}_n + (h_{nn}^t + V\gamma_{nn}^{tx} + V^2 h_{nn}^x + \dot{V}g_{nn}^x) \beta_n \} \quad (12)$$

$$+ k_{nn} \beta_n - \left[ \sum_{i=1}^J \tau_{imn} \alpha_i \right] \beta_n = f_m p$$

## 4. 동적 시간 응답

이산화를 통해 행렬-벡터 형태의 방정식으로 표현된 운동방정식은 동적 시간응답을 얻기 위해 Newmark방법을 이용하여 수치적분이 수행하였다.

시간응답을 얻기 위해 적용한 외팔보의 물성값은  $E=200\text{GPa}$ ,  $\rho=7980\text{kg/m}^3$ ,  $I=8.3 \times 10^{-6}\text{m}^4$ ,  $A=0.003\text{m}^2$ 를 이용하였으며 초기값으로  $L_0=0.01\text{m}$ ,  $V_0=0\text{m/s}$  그리고 전개가속도를  $0.01\text{m/s}^2$ 로 설정하였다. 또한 시간 간격은  $0.001$ 초를 선택하여 수치적분을 수행하였다. 축방향 변위의 수치해석 결과를 아래의 Fig. 2에 나타내었다.

## 3. 결론

비선형 변형률을 고려한 전개하는 보의 축방향과 횡방향에 대한 지배방정식을 유도하였으며 횡방향의 거동은 축방향 변위와의 연성효과가 있다는 것을 방정식을 통해 확인하였다. 연성효과에 의한 횡방향 변위의 변화를 프로그램을 통해 확인할 것이나.

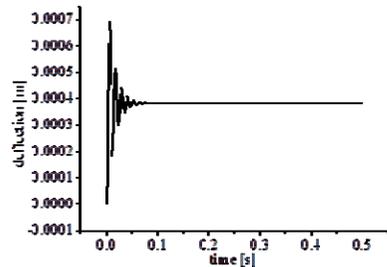


Fig. 2. Axial deformation at the end of beam