

# 원통형셸 구조물의 점가진 입력파워 추정 Input Power Estimation of Point Loaded Cylindrical Shell

이경현†  
Kyoung-Hyun Lee †

**Key Words :** Cylindrical shell(원통형셸), Mobility(모빌리티), High frequency vibration(고주파 진동), Input power(입력파워)

### ABSTRACT

The power input to an infinite cylindrical shell excited by a point force is investigated. The circumferential direction and axial direction of the cylindrical shell is assumed as a two-dimensional unbounded medium, and the point force is replaced as a periodic array of imaginary sources. The spatial Fourier transform is taken from the equation of motion of the cylindrical shell, which is derived from the static model of Donell-Mushtari-Vlasov. The inverse Fourier transform is taken to derive the vibration responses. Mobility from out-of-plane forces and in-plane forces are derived from the obtained vibration responses. The theory is applied to a cylindrical shell excited by a normal direction of point force

## 1. 서 론

통계적 에너지 해석법(SEA)<sup>(1)</sup>, 파워흐름 해석법(PFA)<sup>(2)</sup>과 같은 고주파 진동해석기법이 신뢰할 수 있는 결과를 얻기 위해서는 정확한 진동 입력파워 추정이 필요하다. 지금까지 SEA, PFA해석 시 가장 많이 사용되는 방법은 무한평판 모빌리티를 이용한 추정이다. 하지만 비행기, 잠수함, 어뢰와 같은 원통형셸 구조물의 진동 입력파워를 추정 할 때 무한평판 모빌리티를 사용하게 되면 원통형셸 구조물의 특성을 해석에 반영할 수 없다.

무한 원통형셸 구조물의 진동해석은 일반적으로 길이 방향에 대해서는 wave approach, 그리고 원통방향에 대해서는 modal decomposition(Figure 1)을 통해 이루어진다.

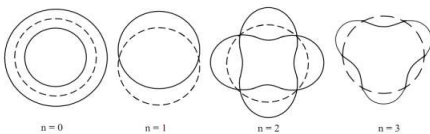


Figure 1. Modal decomposition of cylindrical shell

Franken<sup>(3)</sup>, Heckl<sup>(4)</sup>은 이 방법을 응용해 진공상태의 원통형셸의 진동에 대한 연구를 수행하였으며, Fuller<sup>(5)</sup>와 M.B Xu<sup>(6)</sup>는 fluid loading 을 고려하여 진동해석을 수행하였다. 원통방향에 대한 Modal decomposition 은 외력이 원통의 둘레 모드로 표현되어야 한다는 문제점이 있다. 그래서 이러한 방법들은 점가진 외력을 수학적으로 표현하는데 문제점을 갖고 있다. 점가진을 표현하기 위해서는 아래와 같이 적분식을 근사화 해서 표현해줘야 한다.

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jn\theta} dn = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos n\theta dn \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \quad (1)$$

Brennan<sup>(7)</sup> 은 원통모드에 대한 모빌리티 식을 유도하였다. Ring frequency 보다 매우 작다는 저주파대역 가정을 통해 점가진 모빌리티 식 또한 유도하였다. 그러나 Brennan 의 모빌리티식으로 구조물의 입력파워를 추정할 경우 임의의 방향에 대한 가진력을 고려 할 수 없으며 ring frequency 이상의 대역에 대해서는 입력파워를 추정할 수 없다는 단점이 있다.

본 연구에서는 원통형셸의 고주파 점가진 문제를 수학적으로 정식화 하기 위해 새로운 방법을 사용하였다. 원통의 길이방향과 원통방향에 대해 모두 wave approach 를 사용하여 진동변위를 해석하였

† 교신저자; 정회원, 국방기술 품질원  
E-mail : sam1717@snu.ac.kr  
Tel : 051-750-2536, Fax :051-758-3992

다. 그리고 원통형셸에서 파동이 마치 2 차원 무경계 매질에서의 파동과 유사하다는 가정을 통해 수식을 전개하였다<sup>(8)</sup>. 점가진을 무경계 매질에서 수학적으로 표현하기 위하여 가상 가진력들의 배열로 외력을 치환하였으며 공간 푸리에 변환(spatial Fourier transform)을 통해 점가진 문제를 wave number domain 에서 대수방정식을 풀은 후 residue integral 을 통해 역푸리에 변환을 수행하였다<sup>(9)</sup>. 모빌리티는 가진점에서의 진동응답을 통해 계산하였다.

## 2.1. 점가진 원통형셸의 정식화

긴 원통형 셸 (Figure 2)은 두께(h)가 반경(R)보다 일반적으로 훨씬 작기 때문에 표면에서의 거리는 R 을 단위로 계산한다. 따라서 무차원화된 2 차원 좌표계는  $x = X/R$ ,  $y = \phi$  로 표현할 수 있다. 여기서 X 는 셸의 길이방향으로 측정된 좌표이며  $\phi$  는 시계반대방향으로 계산된 원통형 좌표계에서의 각도이다. 무차원화 된 시간( $\tau = \omega_r t$ )은 ring frequency 를 기준으로 측정되며 ring frequency 는 아래와 같다.

$$\omega_r = \sqrt{(E/\rho)(1-\gamma^2)^{-1}} R^{-1} \quad (2)$$

여기서 E 는 탄성계수이며,  $\gamma$  는 프아송 비,  $\rho$  는 탄성체의 단위 부피당 질량이다.

본 연구에서 사용된 원통형 셸 방정식은 Donnel-Mushtari 방정식으로부터 유도된 강제진동 방정식으로 다음과 같이 표현된다.

$$u_{rr} - [u_{xx} + (1-\gamma)u_{yy}/2 + (1+\gamma)v_{yy}/2 + \gamma w_x] = F_x(x, y, \tau) \quad (3-a)$$

$$v_{rr} - [v_{yy} + (1-\gamma)v_{xx}/2 + (1+\gamma)u_{xy}/2 + w_y] = F_y(x, y, \tau) \quad (3-b)$$

$$w_{rr} + [\mu_x + v_y + w] + \varepsilon \nabla^4 w = F_n(x, y, \tau) \quad (3-c)$$

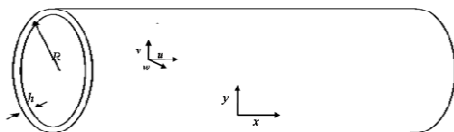


Figure 2. Coordinate system of cylindrical shell

여기서  $u, v, w$  는 각각  $x, y, z$  방향의 변위이다. 각

식의 오른쪽에 위치한 외력항은  $F_x$  는 길이방향의 힘이며  $F_y$  는 원주방향의 힘,  $F_n$  은 수직방향의 힘이다. 각각 힘들은 무차원화 시키기 위하여  $\rho h \omega_r^2$  으로 나누어 주었다. (3-c) 식에 나오는  $\varepsilon$  는  $\varepsilon = h^2/12R^2$  를 통해 계산된다.

$y$  는 실제로는  $0 \leq y \leq 2\pi$  의 값을 갖는다. 하지만 본 연구에서는  $y$  를 경계가 없는 무한한 변수로 가정하였다. 이 방법은 A.D Pierce<sup>(8)</sup>가 점가진된 얇은 원통형 셸의 파동전파가 경계가 없는 2D 구조물에서의 파동전파와 유사한 성질을 보임을 소개하였다.

A.D Pierce 는 x 방향과 y 방향을 모두 경계가 없는 무한 변수로 가정 함으로써 2 차원 등방성 매질이라는 가정을 통해 wave approach 를 양방향에 적용하였다. 이를 통해 연속적인 변수로써 wave number 를 구했으며, dispersion relation 을 구했다. 이를 실험을 통해 dispersion relation 값을 구한 후 wave approach 를 통해 구한 dispersion relation 값을 비교검증 해 이 방법의 신뢰성을 검증하였다. 본 연구에서는 Pierce 의 방법을 응용하여  $y$  를 무경계 변수로 가정 하고 이를 통해 진동응답을 계산하였다.

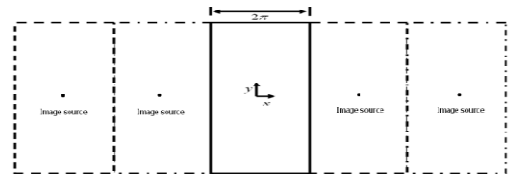


Figure 3. Cylindrical shell replaced by an equivalent two-dimensional unbounded medium (original excitation is replaced by a periodic array of imaginary sources)

$y$  가 원통형셸에서 원통방향이기 때문에, 대부분의 원통형셸 진동 연구에서는 해석 범위를  $-\pi$  에서  $\pi$  로 제한한다. 하지만 이러한 접근법은 원통 방향의 wave number 가 정수 값을 갖게 되고, 이로 인해 점가진력은 원통모드로 표현된 선가진의 함으로 근사할 수 밖에 없다. 하지만 본 연구에서는  $y$  를  $-\infty$  에서  $\infty$  까지 정의된 무경계 매질로 가정 함으로써 연속적인 wave number 를 갖게 된다. 이러한 가정을 통한 이상화를 통해 원통형셸 문제에서도 Langley<sup>(9)</sup>가 무한평판의 점가진 진동문제에 사용했듯이 공간 푸리에 변환을 통해 원통형셸의 점가진 문제를 수학적으로 정식화 할 수 있다.

실제 원통형셸에서는 점가진에서 발생한 파동은 원통의 둘레 방향을 돌아 다시 가진점으로 돌아오게 된다. 하지만  $y$  를 무경계 변수로 가정하게 되면

점가진을 하나만 배치 했을 경우 원통의 둘레를 돌아오는 파동에 의한 진동응답은 고려할 수 없다. 따라서 이러한 원통방향의 주기성을 고려해서 2 차원 무경계 매질에서의 원통형셀 문제에서의 점가진을 Figure 3 과 같이 가상 가진력들의 배열로 표현하였다.

각각의 가상 가진력에 의한 진동응답을 선형합으로 최종진동응답으로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, \tau) &= \sum_{s=0}^{\infty} u_s(x, y, \tau), \\ v(x, y, \tau) &= \sum_{s=0}^{\infty} v_s(x, y, \tau), \\ w(x, y, \tau) &= \sum_{s=0}^{\infty} w_s(x, y, \tau) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $u_s, v_s, w_s$  는 각각의 가상 가진력에 의한 진동변위이며, 아래첨자  $s$  는 가상 가진력의 번호이다. 그리고 가진력 번호  $s=0$  의 위치를 원점 ( $x=y=0$ )으로 설정하면 가진력은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$F_x, F_y, \text{ or } F_n = 1 \sum_{s=0}^{\infty} (2\pi)^2 F_0 \delta(x) \{ \delta(y+2\pi s) + \delta(y-2\pi s) \} e^{-j\Omega \tau} \quad (5)$$

여기서  $\Omega$  ring frequency 를 단위로 계측된 무차원화 된 주파수 이다. 모든 시간함수로 표현되는 외력함수는 푸리에 시리즈를 통해 표현할 수 있기 때문에 본 연구의 수학적 전개는 단일 주파수에 대해 이루어졌다.

(4)식은 선형 방정식이기 때문에 점가진에 의해 생성된 변위는 각각  $x, y, n$  방향에 대한 힘들에 의해 생성된 변위의 선형 합으로 표현할 수 있다. 무한한 2-D 구조물로 가정이 되었기 때문에 계산의 편의를 위해 점가진의 위치는 원점( $x=y=0$ )으로 설정하였다. 또한 원통형 셀의 끝에서 파동의 반사는 고려되지 않았다. 또한 감쇠를 고려하면,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \rightarrow \infty \\ \text{then } |u, v, w| &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

를 얻을 수 있고 이 조건을 통해 공간 푸리에변환(Spatial Fourier Transform)을 수행할 수 있다.

공간 푸리에 변환을 수행하여 계산된 점가진 응

답  $U(\alpha, \beta, \Omega), V(\alpha, \beta, \Omega), W(\alpha, \beta, \Omega)$  는 진동응답  $u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t)$  와 아래와 같은 관계를 갖는다.

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-j\alpha x} e^{-j\beta y} dx dy \quad (7-a)$$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-j\alpha x} e^{-j\beta y} dx dy \quad (7-b)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w e^{-j\alpha x} e^{-j\beta y} dx dy \quad (7-c)$$

$\alpha, \beta$  는 각각  $x, y$  방향의 wave number 이다. (4) 식을 원통 평면에 수직인 방향의 점가진외력에 대해 위와 같이 푸리에 변환을 수행하면,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} (2\pi)^2 \lambda_s F_0 \cos(\beta s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \lambda_s = 1 \text{ for } s = 0 \\ \lambda_s = 2 \text{ for } s \neq 0 \end{cases}$$

를 얻을 수 있다. 여기서  $L$  은 미분연산자의 푸리에 변환 값이다. 이 결과를 이용하면  $L$  행렬의 역행렬을 구하여  $U, V, W$  를 행렬식으로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} (2\pi)^2 \lambda_s F_0 \cos(\beta s) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$= \frac{\sum_{s=0}^{\infty} (2\pi)^2 \lambda_s F_0 \cos(\beta s)}{D} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix}$$

$I$  행렬은  $L$  행렬의 역행렬이다. 그리고  $D$  행렬은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$D = |L| \quad (10-a)$$

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (10-b)$$

$$\begin{aligned} D &= [k^4 \varepsilon - \Omega^2][\Omega^2 - k^2][\Omega^2 - (1-\gamma)k^2/2] \\ &+ (1-\gamma)[(1-\gamma^2)\alpha^4 - (2\gamma+3)\alpha^2\Omega^2 - \beta^2\Omega^2]/2 + \Omega^4 \end{aligned} \quad (10-c)$$

그러면  $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$  는 wave number 인  $\alpha, \beta$  그리

고  $k$  를 통해 아래와 같이 표현된다.

$$\hat{U} = i(\alpha/k^2)\{(\beta^2 + \gamma\alpha^2)[(1-\gamma)k^2/2 - \Omega^2]\} - i(\beta/k^2)\{(1-\gamma)\alpha\beta[k^2 - \Omega^2]\} \quad (11-a)$$

$$\hat{V} = i(\beta/k^2)\{(\beta^2 + \gamma\alpha^2)[(1-\gamma)k^2/2 - \Omega^2]\} + i(\alpha/k^2)\{(1-\gamma)\alpha\beta[k^2 - \Omega^2]\} \quad (11-b)$$

$$\hat{W} = [k^2 - \Omega^2][(1-\gamma)k^2/2 - \Omega^2] \quad (11-c)$$

$x, y$  방향 가진에 대해서도  $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$  는 같은 방법을 통해 구할 수 있다.

임의의 방향에 대해서는 선형독립인  $x, y, n$  방향의 힘의 벡터합을 통해 외력을 표현한 후 각각의 방향의 힘에 대해 진동응답을 구한 후 이를 선형합으로 표현하면 임의의 방향의 점가진을 고려할 수 있다.

## 2.2. 푸리에 역변환을 통한 진동응답 유도

점가진된 원통형셀의 진동 입력과위를 추정하기 위해서는 가진점에서의 진동응답을 구해야 한다.  $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$  를 푸리에 역변환(Fourier inverse transform) 하게 되면 가진점에서의 진동응답  $u, v, w(x=y=0)$  을 아래 식을 통해 구할 수 있다.

$$u = 1/(2\pi)^2 \lim_{x,y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta \quad (12-a)$$

$$v = 1/(2\pi)^2 \lim_{x,y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta \quad (12-b)$$

$$w = 1/(2\pi)^2 \lim_{x,y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta \quad (12-c)$$

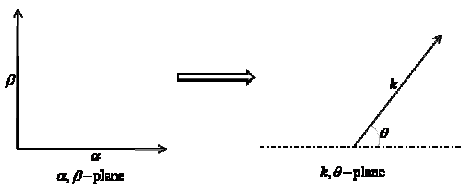


Figure 오류! 지정한 스타일은 사용되지 않습니다.  
Coordinate transformation,  $\alpha, \beta$ -plane to  $k, \theta$  plane

식 (12)은  $\alpha, \beta$  축에서 이차원 푸리에 변환이다. 그러나 관심영역이 소스 근처 즉 원점이기 때문에 ( $x=y=0$ ), 수치적인 적분법 (asymptotic evaluations of integrals)을 사용할 수 없다. 따라서  $\alpha, \beta$  축에서는 위 식의 적분을 수행하는데 있어서

문제점이 있다.  $\alpha, \beta$  축에서  $k, \theta$  축으로 좌표변환 (Figure 4)을 하게 되면 ( $\alpha = k \cos \theta, \beta = k \sin \theta$ ), 아래와 같은 좀더 유용한 적분 식을 얻을 수 있다.

$$w = 1/(2\pi)^2 \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} W e^{-jkr} k dk d\theta$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s F_0 \cos(ks \sin \theta)}{D} \hat{W} e^{-jkr} k dk d\theta \quad (13)$$

$u, v$  를 구하기 위해서는 식 (15)에 있는  $W$  가  $U$  또는  $V$  로 바뀌면 구할 수 있다. 식 (14)을 이용하면,  $w_s$  은 아래와 같이 표현된다.

$$w_s = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda_s F_0 \cos(ks \sin \theta)}{D} \hat{W} e^{-jkr} k dk d\theta \quad (14)$$

본 연구에서는, 감쇠계수를 강성계수  $E$  를 복소 강성계수  $E(1+j\eta)$  로 치환 함으로써 고려하였다. 여기서  $\eta$  는 감쇠계수이다<sup>(10)</sup>. 그러면  $D, \hat{W}$  는  $k$  의 복소함수가 되며, 그래서 식(12)은 복소평면상에서 계산되어야 한다.

$s=0$  일 때, 복소평면에서의 로그함수 성질을 이용하면 ( $\ln z = \ln|z| + i \arg(z)$ ) 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{W}}{D} k \ln k dk = \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\hat{W}}{D} (\ln|k| + j\pi) dk + \int_0^{\infty} k \frac{\hat{W}}{D} (\ln|k|) dk \quad (15)$$

그리고  $D, \hat{W}$  가  $k$  에 대해 우함수라는 성질을 이용하면 식 (14)의 오른쪽 적분식은 아래와 같이 표현된다.

$$\int_{-\infty}^0 k \frac{\hat{W}}{D} j\pi dk = - \int_0^{\infty} k \frac{\hat{W}}{D} j\pi dk \quad (16)$$

식 (14)와 식 (15) 를 이용하면

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\hat{W}}{D} k dk = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{W}}{D} k \ln k dk \quad (17)$$

위와 같이 식 (17)을 얻을 수 있으며, 식 (15)를 통해 적분 구간이 바뀌게 되었다. 이를 이용하여 식

(14)을 다시 써주면

$$w_s = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{W}}{D} \cos(ks \sin \theta) k \ln k \, d\theta dk \quad (18)$$

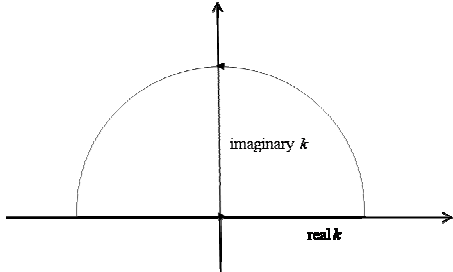


Figure 5. Contour integration over upper half of  $k$ -plane

$k$ 에 대한 적분은 (Figure 5)와 같이 반원의 반지름이 무한대인  $k$  축에서의 선적분으로 치환할 수 있다. 그러면 method of residues 를 통해,  $w_s$  는  $D$ 의 해인 각각의 pole 들에 의한 residue 의 합으로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$w_s = \frac{j}{\pi} \text{Re} s \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\hat{W}}{D} k \ln k \, d\theta \right\} \quad (\text{for } s=0) \quad (19)$$

$s > 0$  인 경우, 먼저  $s=0$  과 마찬가지로 적분구간을 바꿔주기 위한 과정이 필요하다. 적분구간을 바꿔준 후  $w_s$  를 다시 써주면 아래와 같다.

$$w_s = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{F_0}{D} \hat{W} \{ e^{jks \sin \theta} \} d\theta dk + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{F_0}{D} \hat{W} \{ e^{-jks \sin \theta} \} d\theta dk \quad (20)$$

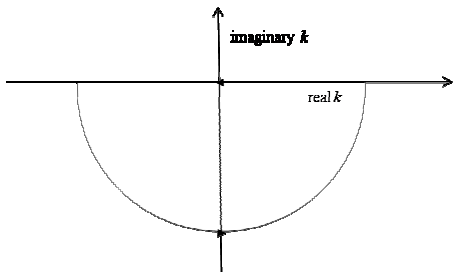


Figure 6. Contour integration over lower half of  $k$ -plane

식 (20)에서  $k$ 에 대한 적분을 수행하기 위해서는 선적분으로 적분을 치환할 때 먼저 그 선적분 경

로를 선택함에 있어서 해석가능한(analytic)한 경로를 택해야 한다.  $\sin \theta > 0$  일 때는 식 (20)의 첫 번째 적분식은 Figure 5 와 같은 적분 경로를 택해야 하나 식 (20)의 두 번째 적분식의 경우 복소평면 하단이 해석 가능한 구간이기 때문에 Figure 6 와 같은 적분경로를 택해야 한다. 그리고  $\sin \theta < 0$  인 경우에는  $\sin \theta > 0$  와 반대로 적분 경로를 잡아 주면 된다. 그러면 위의 선적분은 method of residues 를 통해 계산할 수 있다.

진동 응답  $w$  는  $w_s$  의 선형합을 통해 수학적으로 표현할 수 있으며  $u, v$  는 식 (18)에서  $\hat{W}$  를  $\hat{U}, \hat{V}$  로 바꿔줌으로써 구할 수 있다.

### 2.3. 입력파워 계산

원통형셸에 외력이 점가진 형태로 작용할 때, 가진점( $x=y=0$ )에서의 진동변위는 식 (20)를 통해서 구해진다. 가진점에서 생성 되는 진동 입력파워는 두가지 파동 형태로 생성되는데, 하나는 면외 가진력에 의한 입력파워(flexural wave power input) 또 하나는 면내가진력에 의한 입력파워(longitudinal, shear wave power input) 이다. 외력  $F_x, F_y, F_n$  은 원통의 주기성을 고려하기 위해 생성했던 가상가진력들을 고려하지 않고 원점에서의 외력만 계산해준다.

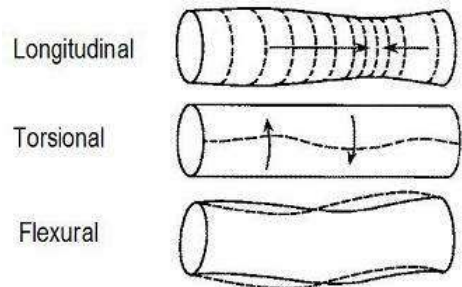


Figure 7. Three types of waves in vibration of cylindrical shell

면외 가진력에 의한 입력파워는 수직가진력과 가진점에서의 진동응답의 벡터 내적을 통해 구할 수 있다, 따라서

$$P_{opw} = \vec{F}_n \cdot \frac{d}{d\tau} (\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}) = \vec{F}_n \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{w} \quad (21)$$

여기서  $P_{opw}$  는 면외가진력에 의한 입력파워이

며, SEA 와 PFA 의 진동변수들과 마찬가지로 식 (21)을 시간평균을 해주면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\tilde{P}_{opw} = 1/2 \operatorname{Re}[i\Omega F_n w^*] \quad (22)$$

면내가진력에 의한 입력파워 역시 면내 가진력 인 x 방향과 y 방향의 외력과 가진점에서의 진동응답의 벡터내적을 통해 구할 수 있으며, 이를 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} P_{ipw} &= (\vec{F}_x + \vec{F}_y) \cdot \frac{d}{d\tau} (\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}) \\ &= (\vec{F}_x \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{u}) + (\vec{F}_y \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{v}) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $P_{ipw}$  는 면내 가진력에 의한 입력파워이며, 식 (23)를 시간평균을 취하게 되면 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$\tilde{P}_{ipw} = 1/2 \operatorname{Re}[i\Omega F_x u^*] + 1/2 \operatorname{Re}[i\Omega F_y v^*] \quad (24)$$

### 3. 입력파워 추정 예제

본 절에서는 진공상태의 원통형셸에 수직 점가진이 외력으로 주어졌을 때 본 연구의 이론을 바탕으로 입력파워를 해석해 보았다. 감쇠계수값을 변화시키면서 입력파워를 계산하였는데 이를 통해 모드 밀도가 높은 ring frequency 대역에서는 입력파워가 감쇠계수의 영향을 크게 받음을 알 수 있었다. 그리고 가상가진력이 원점에서 멀어질수록 감쇠에 의한 영향으로 가상가진력에 의한 진동응답이 전체 진동응답에 미치는 영향이 작아짐을 보였다.

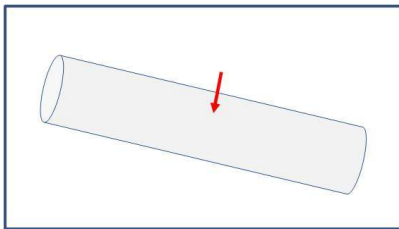


Figure 8. Cylindrical shell excited by normal force

먼저 진공상태의 원통형셸에 점가진 외력이 원통에 수직하게 작용하는 경우를 고려해 보았다. 원통형셸의 물성치는 Table 1 과 같다.

Table 1 Material properties of cylindrical shell

$E$	$7.1 \times 10^{10}$
$h$	0.001
$R$	1
$\rho$	$2700 \text{ kg/m}^3$
$\gamma$	0.33
$\eta$	0.001
$F_n$	1

식 (22)을 통해 원통형셸의 외력에 의한 입력파워를 계산하기 위해서는, 먼저 식 (18)를 통해 진동응답을 계산 해야 한다.  $\theta$  에 의한 적분은 Gauss-quadrature 를 통해 이루어 졌으며, 이를 통해 진동응답 식을 다시 써주면

for  $s = 0$

$$w_s \approx \frac{j}{\pi} \operatorname{Res} \left\{ \sum_{j=1}^4 A_j \frac{\hat{W}}{D}(k, \theta_j) k \ln k \right\} \quad (25)$$

for  $s > 0$

$$\begin{aligned} w_s &\approx \frac{j}{\pi} \operatorname{Res} \left\{ \sum_{j=1}^4 A_j F_0 \frac{\hat{W}}{D}(k, \theta_j) \{e^{jks \sin \theta_j}\} k \ln k \right\} \\ &+ \frac{j}{\pi} \operatorname{Res} \left\{ \sum_{j=1}^4 A_j \frac{\hat{W}}{D}(k, \theta_j) \{e^{-jks \sin \theta_j}\} k \ln k \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $\theta_j, A_j$  는 4-point Gauss-quadrature formula 의 계수들이다. 식 (25) 에서  $k$  에 대한 적분은 복소평면 상단에 위치하는 각각의 pole 들의 residues 의 합을 통해 이루어졌다. 식 (26)에서  $\sin \theta_j > 0$  인 node 에서는 residue 의 합이 해석 가능한 복소평면에서 계산되어야 하는데 첫 번째 식에서는 복소평면의 상단의 pole 들을 통해 계산되어야 하며 두번째 식의 경우 복소평면 하단에서 pole 들의 계산이 이루어져야 한다.  $\sin \theta_j < 0$  인 node 에서는  $\sin \theta_j > 0$  인 경우와 반대로 적분 경로를 잡아 주면 된다.

진동응답은 가상가진력들의 무한합으로 표현된다. 하지만  $s$  이 증가할 수록, Figure 9 에서 볼 수 있듯이 진동응답은 0 에 근접해 가는 것을 살펴볼 수 있다. 따라서  $s$  가 높아질수록 가상가진력이 전체 진동응답에 미치는 영향은 매우 작아진다는 결론을 얻을 수 있으며, 이를 통해  $s=10$  으로 제한하였다.

이 경우 면내 가진력에 의한 입력파워  $P_{ipw}$  은

$F_x = F_y = 0$  이기 때문에 0 값을 갖는다. 식 (22)을 통해 계산된  $P_{opw}$  는 Figure 10 에 다양한 감쇠계수 값에 대해 구해졌다. 여기서 입력파워의 최대값이 무차원화 된 주파수  $\Omega=1$  에서 즉 ring frequency 에서 최대최대 값을 살펴볼 수 있다. 그리고 입력파워의 최대값이 감쇠계수에 크게 영향을 받는 것을 알 수 있다. 그러나 ring frequency 에서 멀어지면 감쇠계수의 영향은 상대적으로 작아지는 것을 살펴볼 수 있다.

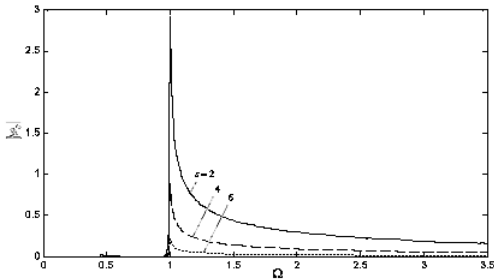


Figure 9. Amplitude of vibration responses  $|w_s|$ , from different imaginary sources.

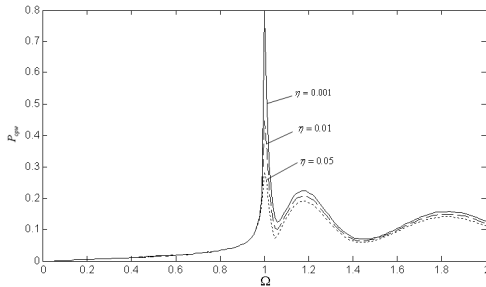


Figure 10. Out-of plane power input to circular cylindrical shell excited by normal point force

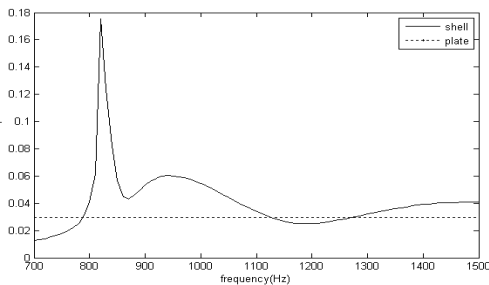


Figure 11. Out-of plane power input to circular cylindrical shell excited by normal point force(h=1mm) compared with input power calculated by infinite plate mobility

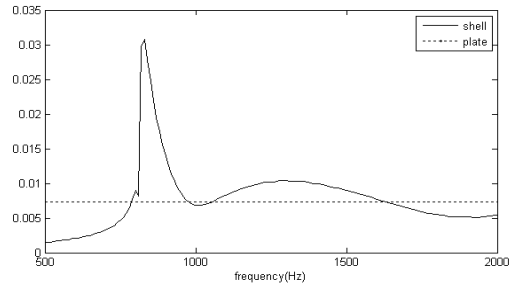


Figure 12. Out-of plane power input to circular cylindrical shell excited by normal point force(h=2mm) compared with input power calculated by infinite plate mobility

#### 4. 결 론

본 연구에서는 파워흐름 해석법이나 SEA 에서 사용할 수 있는 원통형셸 구조물의 점가진 입력파워를 추정 이론을 개발하였다. 이를 통해 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

(1) 일반적으로 원통형셸의 진동에 대한 연구는 원통방향에 대해서는 modal decomposition 이 이루어지고 길이 방향에 대해서는 wave approach 가 이루어진다. 하지만 이 방법은 점가진을 수학적으로 모델링 하는데 있어서 어려움을 갖고 있어서 고주파 대역, 즉 ring frequency 대역에서 정확한 진동 응답을 계산할 수 없다.

(2) 원통형셸의 점가진 진동응답을 계산할 때 길이 방향 뿐만 아니라 원통방향에도 wave approach 를 적용 함으로써 원통형셸의 점가진 문제를 좀더 효과적으로 고려할 수 있다.

(3) 원통형셸에서 일반적으로 사용되는 원통좌표계는 무경계 이차원 좌표계로 가정되었고 이러한 가정을 통해 점가진 외력은 가상가진력들의 배열로 수학적으로 표현되었다.

(4) 원통형셸에서 일반적으로 사용되는 원통좌표계는 무경계 이차원 좌표계로 가정되었고 이러한 가정을 통해 점가진 외력은 가상가진력들의 배열로 수학적으로 표현되었다.

(5) 이 가정을 통해 감쇠계수가 고려된 진동 시스템에서는 2 차원 푸리에 변환이 가능해 지고 푸리에 변환을 통해 진동 문제를 wave number domain 에서 풀게된다. 이를 다시 푸리에 역변환을 통해 진동응답을 구한 후 이를 통해 입력파워를 구할 수 있다.

#### 참 고 문 헌

(1) R.H. Lyon, R.G. Dejong, 1995, Theory and Application of Statistical Energy Analysis, second ed., Butterworth-Heinemann, London.

(2) D.J. NEFSKE, S.H. SUNG, 1989, Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design 111, pp. 94-100.

(3) P.A Franken, 1960, Input impedances of simple cylindrical shells, Journal of the Acoustical Society of America 32(4), pp 473-477.

(4) M. Heckl, 1962, Vibrations of point-driven cylindrical shells, Journal of the Acoustical Society of America 34 (10), pp.1553-1557.

(5) C.F. Fuller, 1983, The input mobility of an infinite circular cylindrical elastic shell filled with fluid, Journal of Sound and Vibration 87 (3), pp. 409-427.

(6) M.B. Xu, 2000, Vibrational power flow input and transmission in a circular cylindrical shell filled with fluid, Journal of Sound and Vibration 234 (3), pp. 387-403.

(7) M.J. Brennan, 2003, Simplified mobility expressions for infinite in-vacuo pipes, Journal of Sound and Vibrations 260, pp. 329-348

(8) A.D. Pierce, 1990, and H.G. Kil, Elastic wave propagation from point excitations on thin-walled cylindrical shells, Elastic wave propagation, ASME J. Vib. Acoust. 112, pp. 399-406

(9) R.S Langley, 1995, On the power input to point loaded hysterically damped structures, Journal of Sound and Vibrations 181(4), pp. 657-672

(10) S.Rao, 2007, Vibration of continuous systems, Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, pp. 584